I. ΠΟΠΟΦ

ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΙ

ΔΙΔΑΧΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ
ΓΙΑ ΤΙΝ 5-ι ΚΕ 6-ι ΤΑΚΣΙ
ΤΥ ΜΙ ΠΛΕΡΙΥ ΜΕΣΕΥ
ΚΕ ΜΕΣΕΥ ΣΧΟΛΙΥ

Ενκρίθικε απ' το ΛΕΠ τις ΡΣΟΣΔ

Μετάφρασι: Δ. Κ. ΚΑΖΑΝΤΖΙ

Ι μετάφρασι ενκρίθικε απ' το διεφθιντι
τυ Αζοφο-Μαβροθ. ΚραιΟΝΟ

ΕΚΔΟΣΙ ΤΡΙΤΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟ „ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ"
ΚΡΙΜΣΚΑΓΙΑ
1937



1. ΓΡΑΦΙ ΚΕ ΑΠΑΝΚΕΛΙΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Ιςαγογι.

Ι αριθμιτικι ίνε επιςτίμι, πυ καταγίνετε με τυς αριθμυς, τις ιδιότιτές-τυς κε τις πράχςις πυ κάνυμε μ' αφτυς.

Ι αρχι τις αριθμιτικις μπίκε τότε, πυ ι άνθροπι έμαθαν να μετράνε, πυ άρχιςαν να καταλαβένυν τι μονάδα ςαν ιδιέτερο αντικίμενο τις μέτριςις. Σπυδάζοντας τα διάφορα μνιμία, πυ μας έμιναν απ' τυς ανθρόπυς, ι οπίι έζιςαν στα παλια χρόνια κε ςινάμα τις επιγραφες τον μνιμίον αφτον, μπορύμε να πύμε, πός μετρύςαν ι άνθροπι πριν· δεν μπορύμε όμος να ιποδίχςυμε, πιός απ' τυς γνοςτυς ς' εμας λαυς έβαλε τις αρχές τις αριθμιτικις.

§ 2. Φιςικι ςιρα τον αριθμον.

Ι λέχςις «ένα», «μονάδα» χριςιμοπιύνταν για παράςταςι ενος οπιυδίποτε αντικιμένυ. Οταν θέλυμε να παραςτίςυμε με αριθμυς το ςίνολο τον αντικιμένον, τότε πρέπι να μετρίςυμε.

Για να μετρίςυμε τα αντικίμενα, πρέπι πρότα να πάρυμε ένα αντικίμενο, έπιτα κοντά-τυ να βάλυμε ακόμα ένα, στο ςίνολο αφτον τον αντικιμένον προςθέτυμε ακόμα ένα κε υ.κ., βαθμιδον ςχιματίζυντε: 1) ένα αντικίμενο, 2) ένα κε ένα αντικίμενο, 3) ένα κε ένα κε ένα αντικίμενο κε υ. κ. Στι θέςι τις λέχςις έ ν α κε έ ν α μεταχιρίζοντε τι λέχςι δ ί ο, αντις να πύμε έ ν α, έ ν α κε έ ν α — λέμε τι λέχςι τ ρ ί α κε υ. κ. Σχιματίζετε διαδοχικι ςιρα αριθμον: ένα, δίο, τρία, τέςερα, ... Ο μικρότερος αριθμος στι ςιρα αφτι ίνε ι μονάδα. Τι ςιρα αφτι μπορύμε ανάλογα με τις ανάνκες-μας να τιν ςινεχίςυμε όςο θέλυμε, χορις τέλος. Ι ςιρα αφτι δεν έχι τελεφτέο, μέγιςτο αριθμο, επιδι κε στον τελεφτέο αριθμο τις ςιρας αφτις μπορύμε να προςθέςυμε μια μονάδα κε τότε θάχυμε νέο αριθμο, ακόμα μεγαλίτερο.

Ι μέτριςι μας χριάζετε τότε, όταν έχυμε ςίνολα αντικιμένον, πολα αντικίμενα μαζι. Ο αριθμος ςχιματίζετε ςαν αποτέλεζμα τις μέτριςις. Ο ακέρεος αριθμος εκφράζι το ςίνολο κάμποςον μονάδον, ίτε μιας μονάδας.

Με τι μέτριςι αναπτίχθικε ςτον άνθροπο ι δινατότιτα να καταλάβι τις ένιες *ίςος*, *μεγαλίτερος μικρότερος* κε οδίγιςε ςτο ςχιματιςμο τις *φιςικις ςιρας τον αριθμον*.

Ι φιςικι ςιρα τον αριθμον:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...

Στυς πρότυς δέκα αριθμυς δόςανε τις ονομαςίες *ένα*, *δίο*, *τρία*, ..., *δέκα*. Με τι βοίθια αφτον τον δέκα ονομαςιον κε ακόμα κάμποςον άλον ςχιματίζοντε ι ονομαςίες όλον τον αριθμον.

Σχ. 1.

Πρότι φορα κάθε ιδιέτερο αντικίμενο παραςτένονταν με τελία ίτε με γραμύλα. Αφτο όμος ίτανε ακατάλιλο ςε κίνες τις περιπτόςις, πυ ο αριθμος τον μετρύμενον αντικιμένον ίτανε μεγάλος. Για το ςίνολο πολον μονάδον εφεβρέθικαν ιδιέτερα ςιμία. Με τον κερο άλαζαν κε τα αριθμιτικα ςιμία τι μορφί-τυς. Τα ςιμία, πυ μεταχιριζόμαςτε εμις, ονομάζοντε αραβικα πςιφία, επιδι ιποθέτυν, πος αφτα τα πςιφία τα δανίςτικαν ι εβροπέι απο τυς άραβες.

Βαθμιδον ι άνθροπι έμαθαν να εποφελύντε λίγα ςιμία για να γράπςυν όλυς τυς αριθμυς.

§ 3. Προφορικι μέτριςι κε δεκαδικο ςίςτιμα αρίθμιςις.

Θα ςχιματίςυμε πάνο ςτον αριθμιτίρα αριθμυς με φιςικι ςιρα. Ας αρχίςυμε απο το ςίρμα εκίνο, πυ πάνο ςτιν πρότι ικόνα ίνε ςιμιομένο ος πρότο (1). Μετρόντας κε κςεχορίζοντας τα ςφερίδια, τα φέρυμε απο ένα-ένα ςτα αριςτερα: ένα, δίο, τρία, τέςερα, πέντε, έκςι, εφτα, οχτο, ενέα, δέκα.

Πίραμε δέκα *μονάδες πρότις τάκςις*, ίτε όπος τις ονομάζυν αλιότικα, δέκα *απλες μονάδες*. Αφτες ι δέκα απλες μονάδες αποτελυν μια δεκάδα απλον μονάδον. Αφτι θα τιν ονομάςυμε *δεκάδα*, *ίτε μονάδα δέφτερις τάκςις*. Τόρα φέρυμε πίςο τα δέκα ςφερίδια τυ πρότυ ςίρματος τυ αριθμιτίρα κε τ' αντικαταςτένυμε με ένα ςφερίδιο τυ δέφτερυ ςίρματος. Το ςφερίδιο αφτο παραςτένι τι μονάδα τις δέφτερις τάκςις. Προςθέτοντας κςανα απο μια μονάδα, ςχιματίζυμε τυς αριθμυς: ένδεκα, δόδεκα κ.τ.λ. ός τα ίκοςι. Αντικαταςτένοντας τι δεκάδα μ' ένα ακόμα ςφερίδιο τυ δέφτερυ ςίρματος, ςχιματίζυμε διο μονάδες τις δέφτερις τάκςις.

Εκςακολυθόντας να μετράμε τα ςφερίδια με τον ίδιο τρόπο θα φτάςυμε ςτον αριθμο *εκατο*, ςτον οπίο θα αντιςτιχυν δέκα ςφερίδια τυ δέφτερυ ςίρματος. Ετςι ςχιματίςαμε *εκατοντάδα* — διλ. *μονάδα τις τρίτις τάκςις*. Δέκα ςφερίδια τυ δέφτερυ ςίρματος θα αντικαταςτιθύνε πάνο ςτον αριθμιτίρα μ' ένα ςφερίδο τυ τρίτυ ςίρματος. Εκςακολυθόντας κε πάλι τι μέτριςι θα φτάςυμε ςτις δέκα εκατοντάδες, ός τα χίλια.

Εμις μετρίςαμε όλες τις μονάδες τυ *πρότυ τμίματος*. Βλέπυμε, πος δέκα μονάδες τις πρότις τάκςις αποτελυν μια μονάδα τις δέφτερις τάκςις, δέκα μονάδες τις δέφτερις τάκςις αποτελυν μια μονάδα τις τρίτις τάκςις. Δέκα μονάδες τις τρίτις τάκςις αποτελυν μια μονάδα τις τέταρτις τάκςις. Καθεμια μονάδα τις ακόλυθις τάκςις περιέχι δέκα μονάδες τις προιγύμενις κατότερις τάκςις. Γ' αφτο κε το ςίςτιμά-μας ονομάζετε *δεκαδικο ςίςτιμα αρίθμιςις*.

Ι τρις πρότες τάκςις αποτελυν *το πρότο τμίμα* — *το τμίμα τον μονάδον*. Το τμίμα τον μονάδον αποτελίτε απο τρις τάκςις: τον μονάδον, τον δεκάδον κε τον εκατοντάδον.

Μετρόντας παρακάτο, περνάμε ςτις μονάδες τυ *δέφτερυ τμίματος*: θα μετρίςυμε κατα χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδον κε εκατοντάδες χιλιάδον. Ι χιλιάδες, ι δεκάδες τον χιλιάδον κε ι εκατοντάδες τον χιλιάδον ςχιματίζυν το *δέφτερο τμίμα* — *το τμίμα τον χιλιάδον*.

Τι χιλιάδα τον χιλιάδον, ίτε το εκατομίριο το πέρνυν ος μονάδα *τυ τρίτυ τμίατος*, το οπίο επίςις περιέχι τρις τάκςις: τα εκατομίρια (τις μονάδες τον εκατομιρίον), τις δεκάδες τον εκατομιρίον, τις εκατοντάδες τον εκατομιρίον.

Κατόπιν ακολυθι *το τμίμα τον διςεκατομιρίον* — *το τέταρτο τμίμα*, *το τμίμα τον τριςεκατομιρίον* — *το πέμτο τμίμα*.

Ετσι ςτο δεκαδικο ςίςτιμα τις αρίθμιςις:

1) Δέκα μονάδες κάθε τάκςις αποτελυν τιν μονάδα τις ακόλυθις ανότερις τάκςις.

2) Ι τάκςις ςινενόνοντε ςε τμίματα· κάθε τμίμα αποτελίτε απο μονάδες τριον τάκςεον.

Ι ςιρα τις μέτριςις τον αριθμον αντιςτιχι με τι ςιρα τυ ακόλυθυ πίνακα:

5-ο τμίμα	4-ο τμίμα	3-ο τμίμα — εκατομίρια			2-ο τμίμα — χιλιάδες			1-ο τμίμα — μονάδες		
Τριςεκατομίρια	Διςεκατομίρια	9-ι τάκςι — εκατοντάδες τον εκατομιρίον	8-ι τάκςι — δεκάδες τον εκατομιρίον	7-ι τάκςι — μονάδες τον εκατομιρίον	6-ι τάκςι — εκατοντάδες τον χιλιάδον	5-ι τάκςι — δεκάδες τον χιλιάδον	4-ι τάκςι — μονάδες τον χιλιάδον	3-ι τάκςι — εκατοντάδες	2-ι τάκςι — δεκάδες	1-ι τάκςι — μονάδες

§ 4. Αρίθμιςι.

Ολι ι αριθμι γράφοντε με τι βοίθια λίγον ςιμίον. Τα ςιμία αφτα ονομάζοντε π ς ι φ ί α. Ολα τα πςιφία ίνε δ έ κ α —ενέα ςιμαντικα πςιφία, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, κε ένα πςιφίο 0 —το μιδενικο.

Για να παραςτίςυμε έναν αριθμο με τα πςιφία, γράφυμε τυς αριθμυς τις κάθε τάκςις τον έναν ίςτερα απ' τον άλο, αρχίζοντας απ' τιν ανότερι τάκςι έτςι, όςτε ι μονάδες τον ανότερον τάκςεον να ςτέκοντε αριςτερότερα απ' τις μονάδες τον κατότερον τάκςεον. Αν κάπια τάκςι ί τμίμα δεν έχι μονάδες, τότε ςτι θέςι αφτίς τις τάκςις πρέπι να βάζυμε μιδενικο, ςτι θέςι τυ τμίματος—τρία μιδενικα.

1. Γράπςαμε τον αριθμο: 3085. Ο αριθμος αφτος αποτελίτε απο (5) μονάδες, (8) δεκάδες κε (3) χιλιάδες. Εκατοντάδες δεν έχι. Στι θέςι τις τρίτις τάκςις—τον εκατοντάδον—ςτέκετε μιδενικο. Αν δε βάζαμε το μιδενικο, τότε θα ςχιματίζαμε τον αριθμο 385, πυ απανκέλετε ος εκςις: τ ρ ι α κ ό ς ι α ο γ δ ό ν τ α π έ ν τ ε.

2. Γράπςαμε τον αριθμο: 4 000 236. Στον αριθμο αφτο δεν ιπάρχυν όλες ι τρις τάκςις τυ τμίματος τον χιλιάδον, μ' άλα λόγια—λίπι το τμίμα τον χιλιάδον.

Για να μπορέςυμε έφκολα να απανκίλυμε τυς πολιπςίφιυς αριθμυς, τυς γράφυμε χορίζοντας το ένα τμίμα απο το άλο με μικρα διαςτίματα.

Στον αριθμο 15 900 **χμ** το τμίμα τον χιλιάδον ίνε χοριςμένο απο το τμίμα τον μονάδον.

3. Απο τιν αλαγι τις θέςις τον πςιφίον αλάζι κε ι ςιμαςία τυ αριθμυ. Ετςι ι αριθμι: 15 900· 15 090· 19 500· 51 009—ίνε διαφορετικι: το πςιφίο 9 ςτον πρότο αριθμο ςιμένι 9 εκατοντάδες· ςτο δέφτερο—9 δεκάδες· ςτον τρίτο—9 χιλιάδες· ςτον τέταρτο—9 μονάδες.

Ι γραφι τον αριθμον ςτιρίζετε πάνο ςε διο κανόνες:

1) Ι ςιμαςία τον μονάδον, πυ ςιμιόςαμε με πςιφίο, εκςαρτάτε απο τιν θέςι, ςτιν οπία βρίςκετε το πςιφίο αφτο.

Το πςιφίο, πυ βρίςκετε ςτιν πρότι θέςι απο τα δεκςια ςτ' αριςτερα, δίχνι τις μονάδες, ςτι δέφτερι θέςι—τις δεκάδες, ςτιν τρίτι—τις εκατοντάδες τυ πρότυ τμίματος έπιτα αρχίζυν ι μονάδες, ι δεκάδες κε ι εκατοντάδες τυ δέφτερυ τμίματος. Το ίδιο γίνετε κε για το τρίτο τέταρτο κε άλα τμίματα.

2) Αν ςτο τμίμα δεν ιπάρχυν μονάδες κάπιας τάκςις, τότε ςτι θέςι-τυς βάζυμε μιδενικο[1].

Ο αριθμος, πυ παραςτένετε με ένα πςιφίο, ονομάζετε μ ο ν ο π ς ί φ ι ο ς, ο αριθμος, πυ παραςτένετε με διο πςιφία, ονομάζετε δ ι π ς ί φ ι ο ς κ.τ.λ. Ι διπςίφιι, τριπςίφιι κ.τ.λ. αριθμι ονομάζοντε π ο λ ι π ς ί φ ι ι.

[1] Το μιδενικο αραβικα λέγετε ς ι φ ρ

Π.χ: 9 — ο μεγαλίτερος μονοπςίφιος αριθμος.
302 — τριπςίφιος αριθμος.
5400 — τετραπςίφιος αριθμος.
100 — ο μικρότερος τριπςίφιος αριθμος.
999 — ο μεγαλίτερος τριπςίφιος αριθμος.

Κατα τιν απανκελία τον γραφτον αριθμον, απανκέλυμε κςεχοριςτα τις μονάδες κάθε τμίματος, προςθέτοντας τιν ονομαςία τυ τμίματος, π. χ: 917 χιλιάδες, 459 εκατομίρια.

Στις μονάδες τυ πρότυ τμίματος τιν ονομαςία τυ τμίματος αφτυ δεν τιν λένε αλα τιν ενούνε. Στι θέςι-τις απανκέλυν τιν ονομαςία εκίνον τον αντικιμένον πυ μετρύνε. Ετςι, π. χ. απανκέλυν: 345 ατμομιχανες, αντις να πύνε 345 μονάδες ατμομιχανον. Ο αριθμος 40 239 μ απανκέλετε έτςι: ςαράντα χιλιάδες διακόςια τριάντα ενέα μέτρα.

§ 5. Λατινικα πςιφία.

Ι ρομέι για να παραςτίςυν αριθμυς ός τα χίλια μεταχιρίζονταν τα ακόλυθα βαςικα πςιφία:

I — 1· *X* — 10· *C* — 100· *M* — 1000.

Εχτος απ' αφτα ίχαν κε άλα ενδιάμεςα πςιφία:

V — 5· *L* — 50· *D* — 500.

Αν έγραφαν διο ίτε τρία όμια βαςικα πςιφία το ένα κοντα ςτο άλο, τότε ο αριθμος πυ ςχιματίζονταν ιςοδιναμύςε με το άθριζμα τον μονάδον αφτον, π. χ.

II — 2· *XXX* — 30· *MM* — 2000.

Οταν έγραφαν τι μονάδα τις κατότερις τάκςις ςτα δεκςια τον μονάδον τις ανότερις τάκςις, αφτο ςίμενε αριθμο ίςο με το άθριζμα τον ςιμιομένον αριθμον, π. χ.

VI — 6· *XXI* — 21· *MD* — 1500.

Αν όμος έγραφαν τι μονάδα τις κατότερις τάκςις μπροςτα, διλ. ςτ' αριςτερα τον μονάδον τις ανότερις τάκςις, αφτο ςίμενε αριθμο ίςον με τι διαφορα τον παραςτενόμενον αριθμον, π. χ.

IV — 4· *IX* — 9· *XC* — 90· *CD* — 400· *CM* — 900.

Ι παράςταςι τριπςίφιον κε τετραπςίφιον αριθμον μ' αφτον τον τρόπο τις γραφις ίτανε πολίπλοκος. Γι' αφτο τόρα χριςιμοπιύνε ςπάνια τα λατινικα πςιφία: ςτι ςιμίοςι τον κεφαλέον τον βιβλίον, τον τόμον τον ςινγραμάτον, ςτι χρονολογία τις καταςκεβις κάπιυ μνιμίυ κ. τ. λ.

II. ΜΕΤΡΑ, ΜΕΤΡΙΚΟ ΣΙΣΤΙΜΑ.

§ 1. Μεγέθι κε καταμέτριςί-τυς.

Κατα τυς μαθιματικυς ιπολογιζμυς έχυμε να κάνυμε με τα μεγέθι.

Οριζμος. Μέγεθος ςτα μαθιματικα ονομάζετε κάθε τι, πυ μπορύμε να ςινκρίνυμε κε να καταμετρίςυμε.

Το μίκος, το βάρος, ο όνκος, ο χρόνος ίνε μεγέθι.

Για τιν καταμέτριςι τον μεγεθον πρέπι να έχυμε μετρικι μονάδα.

Λογυχάρι το μέτρο, το ςαντίμετρο ίνε μονάδες για τιν καταμέτριςι τυ μίκυς· το χιλιόγραμο, το γραμάριο ίνε μονάδες τυ βάρυς· ι όρα, το δεφτερόλεφτο ίνε μονάδες τυ χρόνυ.

Οριζμι. I. Μετρικι μονάδα ονομάζετε εκίνο το μέγεθος με το οπίο κατα τιν καταμέτριςι ςινκρίνυν όλα τα μεγέθι, πυ ίνε ομοιδι μ' αφτι τι μονάδα.

II. Να καταμετρίςυμε το μέγεθος, ςιμένι να ςινκρίνυμε αφτο με άλο μέγεθος ομοιδες, πυ παραδεχτίκαμε για μονάδα. Διλαδι να μάθυμε απο πόςες μονάδες, ίτε μερίδια αφτις τις μονάδες, αποτελίτε το δομένο μέγεθος.

Ι βαςικες μετρικες μονάδες ίνε: τυ μάκρυς — το ςαντίμετρο, τυ βάρυς — το γραμάριο, τυ χρόνυ — το δεφτερόλεφτο.

Ος αποτέλεζμα τις καταμέτριςις θα προκίπςι αριθμος, π. χ. το βάρος τυ αντικιμένυ, πυ ιςοροπίτε με τρία χιλιόγραμα. Το παραςτένυμε με τον αριθμο 3.

§ 2. Μετρικο ςίςτιμα

Το ςίνολο τον μονάδον, πυ χριςιμοπιύμε για τιν καταμέτριςι όλον τον μεγεθον, ονομάζετε μετρικο ςίςτιμα.

Με τιν ανάπτιξι τις τεχνιχις παρυσιάζετε περιςότερι ανάνκι να καταμετρίςυμε με μεγαλίτερι αχρίβια χε με σταθεροπιμένες μονάδες καταμέτριςις.

Σ' όλες τις εποχες τίθονταν το ζίτιμα για τι δινατότιτα τις έβρεςις σταθερον μονάδον καταμέτριςις απ' τι γίρο-μας φίςι. Ετςι ςχιματίςτιχαν ι μονάδες τυ χρόνυ: έτος, ιμερονίχτιο. Αφτες ι μονάδες αντιςτιχυν ςε οριζμένες χε παντοτινα επαναλαμβανόμενες ςτι φίςι ετίςιες χε ιμερονίχτιες χινίςις τις γις. Ι μονάδα τυ μάχρυς πυ γένιχε δεχτι ςτιν επιςτίμι, το μέτρο, ςχετίζετε με τις διαςτάςις τις γις.

Στι Γαλία, ςτον χερο τις Γαλιχις αςτιχις επανάςταςις ςτα 1795, ος μονάδα μάχρυς έχυν παραδεχτι το μάχρος τυ ενος δεχάχις εχατομιριοςτυ τυ τέταρτυ τυ μεςιμβρινυ τον Παριςίον.

Ετιμάςτιχε ιπόδιγμα — το μέτρο — το οπίο χε τόρα φιλάγετε ςτο διεθνες επιμελιτίριο τον μέτρον χε βαρον ςτο Παρίςι.

Ιςτερα απο αχριβις εχςελένχςις φάνιχε, πος το μάχρος τυ μέτρυ ίνε λίγο μιχρότερο απο το πραγματιχο. Οςτόςο, το ιπόδιγμα αφτο τυ μέτρυ ςε διεθνι ςιμφονία έγινε δεχτο ος μονάδα τυ μάχρυς. Διο αντίτιπα τυ μέτρυ αφτυ φιλάγοντε ςε μας: ςτιν Αχαδιμία τον επιςτιμον χε ςτο Ανότερο επιμελιτίριο τον μέτρον χε βαρον τυ Λενινγραντ.

Στα 1918 ςτις 14 Σεπτέβρι, ςίμφονα με απόφαςι τον Σοβιετ τον Λαιχον Επιτρόπον, έχι ιςαχθι ι ιποχρεοτιχι χριςιμοπίιςι τυ μετριχυ ςιςτίματος ςτιν ΕΣΣΔ. Το μετριχο ςίςτιμα βαςίςτιχε πάνο ςτο γαλιχο ςίςτιμα αρίθμιςις. Ετςι λ. χ. το μέτρο περιέχι: 10 ντετςίμετρα, 100 ςαντίμετρα, 1000 μιλίμετρα.

Στο μετριχο ςίςτιμα, πυ χάθε μονάδα ανότερις τάχςις περιέχι 10, 100, 1000 χ. λ. π. φορες, ίνε πολι χατάλιλο ςτυς μαθιματιχυς ιπολογιζμυς.

§ 3. Παράςταςι τον μονάδον. Με τιν απόφαςι τις Ιδιχις επιτροπις τον μέτρον έχυν ιςαχθι ςίντομες παραςτάςις τον μετριχον μονάδον.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΟΝ ΜΕΤΡΟΝ.

I. Μέτρα τυ μάχρυς.	1 χιλιόμετρο (χμ) = 1000 μέτρα (μ) 1 μ = 10 ντμ = 100 ςμ = 1000 μμ 1 ντμ = 10 ςμ = 100 μμ 1 ςμ = 10 μμ
II. Μέτρα επιφάνιας.	1 τετρ. χμ = 1000000 τετρ. μ = 100 εχτάρια (εχτ) 1 εχτ = 100 αρ (α) = 10 000 τετρ. μ 1 α = 100 τετρ. μ 1 τετρ. μ = 100 τετρ. ντμ = 10 000 τετρ. ςμ. 1 τετρ. ντμ = 100 τετρ. ςμ 1 τετρ. ςμ = 100 τετρ. μμ.
III. Μέτρα όνχυ.	1 χιβ. μ = 1000 χιβ. ντμ = 1 000 000 χιβ. ςμ 1 χιβ. ντμ = 1000 χιβ. ςμ = 1 000 000 χιβ. μμ. 1 χιβ. ςμ = 1 000 χιβ. μμ.
IV. Μέτρα βάρυς.	1 τόνος (τ) = 10 τςέντνερα (τς) = 1000 χιλιόγραμα (χγ), 1 τς = 100 χγ 1 χγ = 1000 γραμάρια (γ)
V. Μέτρα χοριτιχότιτας χιτον χε ιγρον ςομάτον.	1 λίτρα (λ) ίνε χοριτιχότιτα 1 χιβιχυ ντμ 1 εχατόλιτρο (εχλ.) = 100 λ.
VI. Σχέςι μεταχςι τον μέτρον τυ όνχυ χε τυ βάρυς.	Το βάρος 1 χιβ. μέτρυ νερυ ςε 4°Κ = 1 τ. " " 1 χιβ. ντετςιμ. " " " = 1 χγ " " 1 " ςαντιμ. " " " = 1 γ

III. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΕ ΑΦΕΡΕΣΙ ΑΚΕΡΕΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Πρόςθεςι.

Μετρόντας μπορύμε να προςθέςυμε τυς αριθμυς.

1. Ενα πεδι πίρε απ' το ςχολιο 8 τετράδια. Ι αδερφί-τυ πίρε 7 τετράδια. Πόςα τετράδια πίραν μαζι;

Για να λίςυμε το πρόβλιμα, πρέπι να μετρίςυμε όλα τα τετράδια πυ πίραν: το όλο—15 τετράδια.

Γραφι τις λίςις· $8+7=15$ τετράδια.

Στο παράδιγμα αφτο απο τυς διο δομένυς αριθμυς έπρεπε να ςχιματίςυμε νέο αριθμο, πυ να δίχνι, πόςο το όλο μονάδες έχυν αφτι ι αριθμι. Τέτια πράκςι ονομάζετε πρόςθεςι.

2. Μπορύμε να προςθέςυμε κε κάμποςυς αριθμυς:

$$28+38+17+40=123.$$

Ο αριθμος 123 ονομάζετε άθριζμα τον τεςάρον αριθμον: 28, 38, 17 κε 40.

Οριζμος. Τυς αριθμυς, πυ προςθέτυμε, τυς ονομάζυμε προςθετέυς. Ο αριθμος, πυ προκίπτι απο τιν πρόςθεςι, ονομάζετε άθριζμα.

Στο πρότο πρόβλιμα με τυς δομένυς προςθετέυς (8 κε 7) ςχιματίςτικε το άθριζμα (15).

Στιν περίπτοςι αφτι τον διο προςθετέον $(8+7=15)$ ίχαμε:

Πρότο προςθετέο + δέφτερο προςθετέο = άθριζμα.

Τιν πράκςι αφτι μπορύμε να τιν γράπςυμε πιο ςίντομα με τα γράματα τυ αλφάβιτυ $a+b=c$, όπυ ο πρότος προςθετέος παραςτένετε με το γράμα a, ο δέφτερος προςθετέος με το γράμα b, το άθριζμα με το γράμα c.

Αθριζμα μπορύμε να ονομάςυμε όπος το c ètςι κε το $a+b$.

§ 2. Προβλίματα, πυ λίνοντε με πρόςθεςι.

1. Ενα κολχόζι ίχε τα ακόλυθα έςοδα:

Απο τιν πύλιςι τον ςιτιρον ςτο κράτος	65 703 ρ.
Απο τιν πύλιςι προιόντον τυ λαχανόκιπυ	99 682 ρ.
Απο τιν πύλιςι προιόντον χτινοτροφίας	3 319 ρ.
Απο άλυς κλάδυς τυ νικοκιριυ . .	42 416 ρ.
Το όλο ίχε έςοδα το κολχόζι . .	211 120 ρ.

Στο πρόβλιμα αφτο ι ιδιέτερι αριθμι ίνε ι προςθετέι κε το γενικο ςίνολο ίνε το άθριζμα αφτον τον προςθετέον. Λίνοντας το πρόβλιμα βρίςκυμε το άθριζμα κάμποςον προςθετέον, βρίςκυμε αριθμο, ο οπίος περιέχι τόςες μονάδες, όςες περιέχυν όλι ι δομένι αριθμι, μαζι παρμένι.

2. Ενας κολχόζνικος τον πρότο χρόνο, πυ μπίκε ςτο κολχόζι πίρε έναντι τον εργατοιμερόν-τυ 23 **τς** ςιτάρι. Μετα 1 χρόνο πίρε κατα 15 **τς** περιςότερο. Πόςα τςέντνερα πίρε το δέφτερο χρόνο;

Λίςι. $23+15=38$ **τς.**

Εδο έχυμε διαφορετικο πρόβλιμα, πυ λίνετε με πρόςθεςι. Εδο πρέπι να αφκςίςυμε τον αριθμο κατα κάμποςες μονάδες (15).

Κε ς' αφτιν τιν περίπτοςι ι αριθμι (23 κε 15), πυ πίραμε για να προςθέςυμε, ονομάζοντε προςθετέι, το εκςαγόμενο τις πρόςθεςις διλ. το 38 ονομάζετε άθριζμα.

Με τιν πρόςθεςι λίνοντε εκίνα τα προβλίματα, ςτα οπία πρέπι:

1.) Να βρεθι αριθμος, ίςος με όλυς τυς δομένυς αριθμυς μαζι.

2.) Να αφκςιθι ο δομένος αριθμος κατα κάμποςες μονάδες.

Σιμίοςι. Κε τα διο προβλίματα ίνε πάντα δινατα, γι' αφτο μπορύμε να πύμε, πος ι πρόςθεςι ίνε πράκςι, πυ πάντα μπορι να εκτελεςθι.

§ 3. Νόμι τις πρόςθεςις.

1. Απο το ςπίτι-μας ός τι μια άκρι τυ δρόμυ πρέπι να κάνι κανένας 36 **μ**, ός τιν άλι άκρι 52 **μ.** Να βρεθι το μάκρος τυ δρόμυ.

Λίςι. Το γενικο μάκρος θα ίνε: $36+52=$ $=88$ **μ**.

Το ίδιο μάκρος θα προκίπςι κε αν ακόμα πάρυμε τυς αριθμυς με άλι ςιρα: $52+36=88$ **μ.** Βλέπυμε, πος το άθριζμα δεν εκςαρτάτε απο τιν αλαγι τις θέςις τον προςθετέον.

Αντιμεταθετικος νόμος τις πρόςθεςις. Απο τι μετάθεςι τον προςθετέον το άθριζμα δεν μεταβάλετε.

Παραςτένοντας τυς προςθετέυς με τα γράματα a κε b, μπορύμε να γράπςυμε το νόμο αφτο ος εκςις: $a + b = b + a$.

Ο νόμος αφτος αλιθέβι κι αν ακόμα έχυμε άθριζμα τριον ί κε περιςότερον προςθετέον.

2. Να βρεθι το άθριζμα:

$$43 + 65 + 28 = 28 + 65 + 43 = 65 + 43 + 28 = 136.$$

Ι μεταθέςις τον προςθετέον τυ παραδίγματος αφτυ δεν αλάζυν το άθριζμα.

Γραφι με τα γράματα:

$$a + b + c = b + a + c = c + a + b = a + c + b.$$

3. Εχτος απο τον αντιμεταθετικο νόμο, κατα τι λίςι προβλιμάτον πρόςθεςις ςιχνα χριςιμοπιυν κε άλον ακόμα νόμο — τον ςινδιαςτικο.

Σινδιαςτικος νομος. Για να βρύμε το άθριζμα κάμποςον προςθετέον, μπορύμε να τυς χορίςυμε ςε ομάδες κε να πάρυμε χοριςτα το άθριζμα κάθε ομάδας προςθετέον. Στο τέλος προςθέτυμε όλα τα αθρίζματα.

Ο τρόπος αφτος απλοπιι τιν έβρεςι τυ αθρίζματος πολον προςθετέον.

4. να προςτεθυν: $15 + 35 + 22 + 8 + 46 + 9$.

Λίςι. Χορίζυμε τυς προςθετέυς ςε ομάδες, ι οπίες δίνυν άθριζμα ςτρονγκιλυς αριθμυς:

$$15 + 35 + 22 + 8 + 46 + 9 = (15 + 35) + (22 + 8) + (46 + 9) = \\ = 50 + 30 + 55 = 135.$$

Παρατίριςι. Ι παρενθέςις δίχνυν, πος τιν πρόςθεςι μέςα ςτις παρενθέςις πρέπι να τιν κάνυμε νορίτερα. Τα εκςαγόμενα τα προςθέτυμε ίςτερα.

Κατα τυς αριθμιτικυς λογαριαζμυς ςιχνα εποφελύντε τόςο τον αντιμεταθιτικο όςο κε τον ςινδιαςτικο νόμο.

5. Να βρεθι το άθριζμα $43 + 79 + 68$· το άθριζμα, πυ προκίπτι ίνε 190. Μπορύμε όμος να διεφκολίνυμε το λογαριαζμό-μας. Επιδι το άθριζμα $(60 + 7 + 1)$ αντικαθιςτα τον αριθμο 68, φένετε κςεκάθαρα, πος αλιθέβι κε το αντίθετο· τον αριθμο 68 ίνε δινατο να τον αντικαταςτίςυμε με το άθριζμα $60 + 7 + 1$.

Ας χορίςυμε τον αριθμο 68 ς' αφτυς τυς τρις προςθετέυς κε ας τυς βάλυμε ςτι δομένι παράςταςι:

$$43 + 79 + 68 = 43 + 79 + 60 + 1 + 7.$$

Τόρα ας χορίςυμε ςε ομάδες όλυς τυς προςθετέυς, πυ πίραμε:

$$43 + 79 + 60 + 1 + 7 = (43 + 7) + (79 + 1) + 60 = \\ = 50 + 80 + 60 = 190$$

Καθένα προςθετέο μπορύμε να τον αντικαταςτίςυμε με άλυς κάμποςυς προςθετέυς, πυ να δόςυνε το ίδιο άθριζμα μ' αφτον.

§ 4. Πός προςθέτυμε άθριζμα ςε έναν αριθμο.

Ι νόμι τις πρόςθεςις μας επιτρέπυν να προςθέςυμε άθριζμα διο προςθετέον, προςθέτοντας τυς προςθετέυς, αντι τυ αθρίζματος

1. Ενα κολχόζι παράδοςε ςιτάρι ςτο ελεβάτορ με παρτίδες. Τιν πρότι φορα παράδοςε 845 **τς** ςιτάρι, έπιτα έδοςε 30 **τς** κε 75 **τς**. Πόςο ςιτάρι παράδοςε το όλο το κολχόζι;

Λίςι. Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε κατα διο τρόπυς.

1) Προςθέτυμε όλυς τυς αριθμυς:

$$845 + 30 + 75 = 950 \text{ τς}.$$

Στιν περίπτοςι αφτι βρίςκυμε το άθριζμα, προςθέτοντας κςεχοριςτα τυς προςθετέυς.

2) Μπορύμε όμος να βρύμε το βάρος τυ ςιταριυ, πυ φέρανε τελεφτέα κε να το προςθέςυμε με το βάρος τις πρότις παρτίδας:

$$30 + 75 = 105 \text{ τς}, \quad 845 + 105 = 950 \text{ τς}.$$

Εχι προκίπςι το ίδιο άθριζμα. Ας γράπςυμε τόρα τιν ιςότιτα αφτον τον αθριζμάτον με παρενθέςις:

$$845 + (30 + 75) = 845 + 30 + 75 = 950.$$

Για να προςθέςυμε ς' ένα οπιοδίποτε αριθμο άθριζμα αριθμον, μπορύμε να προςθέςυμε ςτον αριθμο αφτο τον καθένα προςθετέο χοριςτα.

Ας γράπςυμε τον κανόνα αφτο με τα γράματα:

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Ο κανόνας τις πρόςθεςις τυ αθρίζματος αλιθέβι κε για το άθριζμα οςονδίποτε προςθετέον.

2. Να βρεθι το άθριζμα: $38 + (42 + 65 + 27 + 83)$.

Λ ί ς ι:

$$38 + (42 + 65 + 27 + 83) = 38 + 42 + 65 + 27 + 83 = 255.$$

§ 5. Πρόςθεςι ακέρεον αριθμον.

Κςέροντας τις ιδιότιτες τυ αθρίζματος, μπορύμε να εκςιγίςυμε όλυς εκίνυς τυς τρόπυς, τυς οπίυς μεταχιριζόμαςτε κατα τιν πρόςθεςι τον ακέρεον αριθμον.

1. Ι πρόςθεςι μονοπςίφιον αριθμον, το άθριζμα τον οπίον δεν ιπερβένι τα δέκα, γίνετε ος εκςις:

$$3 + 5 = 8.$$

2. Ι πρόςθεςι μονοπςίφιον αριθμον, το άθριζμα τον οπίον ιπερβένι τον αριθμο 10 γίνετε έτςι:

$$8 + 7 = 8 + (2 + 5) = 8 + 2 + 5 = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15.$$

Εδο αντικαταςτίςαμε το δέφτερο προςθετέο με ιδιο προςθετέυς κε προςθέςαμε το άθριζμά-τυς, εποφελόμενι το ςινδιαςτικο νόμο.

Ο ένας προςθετέος πρέπι να ςιμπλιρόςι τον πρότο προςθετέο ός τα 10.

3. Κατα τιν πρόςθεςι πολιπςίφιον αριθμον εποφελύμαςτε κε τον αντιμεταθετικο κε το ςινδιαςτικο νόμο.

$$4385 + 2297 = 4000 + 300 + 80 + 5 + 2000 + 200 + 90 + 7 = (4000 + 2000) + (300 + 200) + (80 + 90) + (5 + 7) = 6000 + 500 + 170 + 12 = 6000 + 500 + 100 + 70 + 10 + 2 = 6000 + (500 + 100) + (70 + 10) + 2 = 6000 + 600 + 80 + 2 = 6682.$$

Απο το παράδιγμα αφτο φένετε, πος για να βρύμε το άθριζμα, προςθέτυμε χοριςτα τις μονάδες κάθε τάκςις.

Τι γραφτι διατίποςι μπορύμε να τιν ςιντομέπςυμε:

$$\begin{array}{r} 4385 \\ +\,2297 \\ \hline 6682 \end{array}$$

Αν το άθριζμα τον μονάδον, πυ προκίπτι απο τιν πρόςθεςι, ιπερβένι τον αριθ. 10, τότε το μετατρέπυμε ςε μονάδες τις ακόλυθις ανότερις τάκςις κε τις γράφυμε ς' αφτι τιν τάκςι, ίτε τις ςιμιόνυμε κε τις προςθέτυμε ςτο άθριζμα τον μονάδον τις ακόλυθις ανότερις τάκςις.

Για να προςθέςυμε κάμποςυς αριθμυς, γράφυμε τον ένα κάτο απο τον άλο, έτςι όςτε ι μονάδες καθεμιας τάκςις να βρεθυν ςε μια ςτίλι. Προςθέτυμε τις μονάδες, πυ αποτελυν τι δεκςια ςτίλι κε κάτο απ' αφτι γράφυμε το εκςαγόμενο, αν ίνε μικρότερο τυ 10. Αν όμος ίνε μεγαλίτερο ίτε ίςο με το 10, τότε γράφυμε μονάχα το πςιφίο τον μονάδον-τυ κε τις δεκάδες τις προςθέτυμε ςτι ςτίλι τον δεκάδον, έπιτα προςθέτομε τις δεκάδες κε εχτελύμε το ίδιο ακριβος, ότι κε με τι ςτίλι τον μονάδον· έτςι εκςακολυθύμε τιν πράκςι, οςότυ να τελιόςυν όλες ι ςτίλες. Κάτο απο τιν τελεφτέα ςτίλι γράφυμε όλο το εκςαγόμενο, αδιάφορο αν ίνε μεγαλίτερο ίτε μικρότερο απο το δέκα. Ο αριθμος, πυ προκίπτι ςτο τέλος, ίνε το ζιτύμενο άθριζμα.

§ 6. Αφέρεςι.

1. Ενας μιχανο-τραχτορικος ςταθμος έχι 36 τράχτορα. Εςτιλε απο αφτα για τι μεταφορα φορτίον 17 τράχτορα. Πόςα τράχτορα έμιναν για τις άλες δυλιες;

Λ ί ς ι. $36 - 17 = 19$.

Ι πράκςι αφτι ονομάζετε α φ έ ρ ε ς ι. Αν προςθέςυμε το 19 κε το 17, θα έχυμε άθριζμα 36:

$$19 + 17 = 36.$$

Το 36 ίνε άθριζμα· το 19 κε 17 ίνε προςθετέι. Κςέροντας το άθριζμα (36) κε ένα προςθετέο (17), βρίςκυμε με τιν αφέρεςι το δέφτερο προςθετέο, (19).

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Αφέρεςι λέγετε ι πράκςι εκίνι μέςον τις οπίας απο το άθριζμα κε ένα γνοςτο προςθετέο βρίςκυμε τον άγνοςτο προςθετέο.

Οταν κάνυμε τιν αφέρεςι, δεν ονομάζυμε τυς αριθμυς άθριζμα ίτε προςθετέυς, αλα τυς δίνυμε διαφορετικες ονομαςίες:

I. Ο αριθμος, απο τον οπίο αφερύμε τον άλο, ονομάζετε μιοτέος.

II. Ο αριθμος, τον οπίο αφερύμε, ονομάζετε αφερετέος.

III. Ο αριθμος, πυ προκίπτι ος εκςαγόμενο τις αφέρεςις, ονόμαζετε ιπόλιπο ίτε διαφορα.

Στο πρότο πρόβλιμα βρίκαμε 36 — 17 = 19. Το 36 ίνε μιοτέος. Το 17 ίνε αφερετέος. Το 19 ίνε ιπόλιπο, ίτε διαφορα.

Μιοτέος — αφερετέος = διαφορα.

Ι γραφτι διατίποςι τις αφέρεςις με γράματα: $a - b = c$. Ο a παραςτένι το μιοτέο, ο b τον αφερετέο, ο c τι διαφορα.

Διαφορα ονομάζετε όπος το c, έτςι κε το $a - b$.

§. 7. Ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι ίνε πράκςις αμιβέα αντίςτροφες.

Ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι ίνε πράκςις *αμιβέα αντίςτροφες*.

340 + 250 = 590 κε 590 — 250 = 340.

Ας γράπςυμε τις ονομαςίες τον αριθμον, με τυς οπίυς εκτελύντε ι πράκςις:

	Κατα τιν πρόςθεςι:	Κατα τιν αφέρεςι.
590	το άθριζμα	ο μιοτέος
250	ο ένας προςθετέος	ο αφερετέος
340	ο άλος προςθετέος	ι διαφορα

Πορίζματα. 1. Ο μιοτέος ιςύτε με τον αφερετέο ςιν τι διαφορα.

2. Ο αφερετέος ιςύτε με το μιοτέο, πλιν τι διαφορα.

Τα πορίζματα 1 κε 2 μας επιτρέπυν να βρίςκυμε τον αφερετέο κε το μιοτέο, όταν αφτι ίνε άγνοςτι.

1) $x - 5 = 9$.

Ο μιοτέος ίνε το x, ο αφερετέος το 5, ι διαφορα το 9. Βρίςκυμε:

$$x = 9 + 5; \quad x = 14.$$

2) $8 - x = 3$.

Εδο το x ίνε αφερετέος, το 8 ίνε μιοτέος, το 3 ίνε διαφορα. Βρίςκυμε:

$$x = 8 - 3; \quad x = 5.$$

3) Ενα επιβατικο τρένο αποτελίτε απο 14 βαγόνια. Στο σταθμο τις διαςτάβροςις γατζόςανε στο τρένο 2 βαγόνια κε κςεγατζόςανε 2, πυ ίταν προοριζμένα γι'αφτο το σταθμο. Αλακςε ο αριθμος τον βαγονιον τυ τρένυ;

Λίςι. 14 + 2 — 2 = 14 βαγόνια.

Το γάτζομα κε το κςεγάτζομα τον βαγονιον μπορύςαμε να το εχτελέςυμε κε κατ' άλο τρόπο. Ιταν δινατο πρότα να κςεγατζόςυμε διο βαγόνια, κε κατόπιν να γατζόςυμε άλα διο. Σ' αφτι τιν περίπτοςι ι γραφτι διατίποςι τις λίςις θα ίχε τι μορφι: 14 — 2 + 2 = 14. Το εκςαγόμενο ίνε το ίδιο.

Ι λίςι αφτο τυ προβλίματος μας επιτρέπι να ορίςυμε τιν ακόλυθι ιδιότιτα τις πρόςθεςις κε αφέρεςις ος αντίςτροφες πράκςις:

Αν ς' έναν αριθμο προςθέςυμε άλον αριθμο, κε ίςτερα αφερέςυμε τον ίδιο αριθμο, τότε θα προκίπςι ο πρότος αριθμος.

Ετςι, ι μια απο τις διο αμιβέα αντίςτροφες πράκςις εκμιδενίζι το αποτέλεζμα τις δέφτερις πράκςις.

§ 8. Προβλίματα πυ λίνοντε με αφέρεςι.

1. Ενα κολχόζι κςόδεπςε το όλο 46183 ρύβλια. Απ' αφτα, τα 27 953 κςοδέφτικαν για το νικοκιριο. Τα ιπόλιπα χρίματα δόθικα έναντι τυ χρέυς στιν τράπεζα. Πόσα ρύβλια πλίροςε το κολχόζι στιν τράπεζα;

Λίςι. 46 183 — 27 953 = 18 230 ρύβλια.

Στο πρόβλιμα αφτο το άθριζμα τον διο προςθετέον ίνε 46 183 κε ο ένας απο αφτυς το 27 953. Πρέπι απο το άθριζμα τον διο αριθμον κε απο τον ένα απο αφτυς να βρεθι ο δέφτερος. Το πρόβλιμα αφτο λίνετε με αφέρεςι. Βρέθικε το ιπόλιπο τον χριμάτον, πυ πλίροςε το κολχόζι στιν τράπεζα.

2. Το ςφιρι, το κινύμενο με ατμο, ςφιριλατόντας εκςαρτίματα βγάζι ςχάρτα 40 περίπυ εκςαρτίματα τιν ιμέρα. Ι μπριγάδα, πυ δυλέβι ςτο ςφιρι αφτο, αποφάςιςε να ελατόςι τον αριθμο τον ςχάρτον κατα 15. Να βρεθι το όριο τυ αριθμυ τον ςχάρτον, πυ ι μπριγάδα θεορι ανεχτο.

Λίςι. $40 - 15 = 25$ εκςαρτίματα.

Στο πρόβλιμα αφτο πρέπι να ελατόςυμε τον αριθμο 40 κατα 15 μονάδες.

Το πρόβλιμα λίνετε με αφέρεςι.

3. Ι χτίςτες, χτίζοντας τίχο, επιθέτανε 800 τύβλα τιν ιμέρα. Ενας υντάρνικος άφκςιςε τον αριθμο αφτο ός 1300 τύβλα. Πόςα περιςότερα τύβλα επιθέτι ο υντάρνικος απο τυς άλυς χτίςτες;

Λίςι. $1300 - 800 = 500$ τύβλα.

Στο πρόβλιμα τύτο ςινκρίνοντε διο αριθμι: μαθένυμε κατα πόςες μονάδες ίνε μεγαλίτερος ο ένας αριθμος απ' τον άλο.

Κι' αφτο το πρόβλιμα λίνετε με τιν αφέρεςι.

Ι αφέρεςι χριςιμοπιίτε όταν χριάζετε:

1) να βρίςκυμε ένα προςθετέο, κςέροντας το άθριζμα διο προςθετέον κε έναν απ' αφτυς.

2) να ελατόςυμε τον αριθμο κατα κάμποςες μονάδες (να αφερέςυμε μερικες μονάδες).

3) να μάθυμε, κατα πόςες μονάδες ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος ίτε μικρότερος απο έναν άλο (ςίνκριςι διο αριθμον).

Σιμίοςι Ι. Το δέφτερο πρόβλιμα αφέρεςις δεν ίνε πάντα δινατο. Αφτο δε μπορι να λιθι, αν θέλυμε να ελατόςυμε τον αριθμο κατα αριθμο, μεγαλίτερο τυ μιοτέυ.

Σιμίοςι ΙΙ. Αν ο μιοτέος ίνε ίςος με τον αφερετέο, ι διαφορα ίνε ίςι με μιδενικο. Παράδιγμα: $8 - 8 = 0$.

Πόριζμα. Αν ι διαφορα διο αριθμον ιςύτε με μιδενικο, ι αριθμι αφτι ίνε ίςι.

§ 9. Μεταβολι τυ αθρίζματος.

1. Μια κοπερατίβα χτίζι εκςοχικο ςπίτι για τυς εργάτες. Το κατιχίςιμο εμβαδό-τυ πρέπι να ίνε 56 **τετρ. μ.** Το βοιθιτικο εμβαδο 15 **τετρ. μ.** Κατα τιν επιχίροςι τυ ςχεδίυ αποφάςιςαν να αφκςίςυν το κατιχίςιμο εμβαδο τυ ςπιτιυ κατα 12 **τετρ. μ.** Πόςο ίτανε το γενικο εμβαδο ςτο πρότο ςχέδιο κε κατα πόςο άλακςε ςτο δέφτερο ςχέδιο;

Λίςι. Σίμφονα με το αρχικο ςχέδιο το γενικο εμβαδο ιςύνταν:

$$56 + 15 = 71$$ **τετρ. μ.**

Αφκςάνοντας τον ένα προςθετέο κατα 12 **τετρ. μ** αφκςάνυμε κε όλο το άθριζμα κατα 12 **τετρ. μ** κε βρίςκυμε:

$$56 + 15 + 12 = 68 + 15 = 71 + 12 = 83$$ **τετρ. μ.**

1. Αν αφκςίςυμε τον ένα προςθετέο με οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε το άθριζμα αφκςάνι κατα τον ίδιο αριθμο.

2. Το βάρος ενος αφτοκίνιτυ ίνε 4200 **χγ.** Το βάρος τυ φορτίυ 4800 **χγ.** Πόςο ζιγίζι το αφτοκίνιτο με το φορτίο μαζι; Πός θα αλάκςι το γενικο βάρος τυ φορτομένυ αφτοκίνιτυ, αν το βάρος τυ φορτίυ ελατοθι κατα 200 **χγ;**

Λίςι. Το βάρος τυ αφτοκινίτυ με το φορτίο ίνε $4200 + 4800 = 9000$ **χγ.** Αν το φορτίο ελατοθι κατα 200 **χγ**, το βάρος τυ φορτίυ θα ίνε $4800 - 200 = 4600$ **χγ** κε το βάρος τυ αφτοκινίτυ με το φορτίο θα ίνε $4200 + 4600 = 8800$ **χγ**, διλαδι, το βάρος τυ αφτοκινίτυ μαζι με το φορτίο θα ελατοθι επίςις κατα 200 **χγ.**

Ετςι, κατα τιν ελάτοςι τυ ενος προςθετέυ ελατόνετε κε το άθριζμα.

ΙΙ. Αν έναν απ' τυς προςθετέυς τον ελατόςυμε κατα έναν αριθμο, τότε κε το άθριζμα θα ελατοθι κατα τον ίδιο αριθμο.

3. Ενα αφτοκίνιτο ζιγίζι 4200 **χγ.** Πάνο ς' αφτο μπορύμε να φορτόςυμε 4800 **χγ.** Πός θα αλάκςι το βάρος τυ αφτοκίνιτυ με το φορτίο, αν ελαφρόςυμε το αφτοκίνιτο κατα 200 **χγ.** κε αφκςίςυμε όμος το φορτίο κατα 200 **χγ;**

Λίςι. Το προιγύμενο βάρος τυ αφτοκινίτυ με το φορτίο:

$$4200 + 4800 = 9000$$ **χγ.**

Το νέο βάρος: $4200 - 200 + 4800 + 200 = 4000 + 5000 = 9000$ **χγ.**

Το γενικο βάρος τυ αφτοκινίτυ με το φορτίο μαζι δεν αλάζι.

Ετςι, το άθριζμα δεν άλαχςε, όταν αφχςίςαμε τον ένα προςθετέο κε τον άλο τον ελατόςαμε κατα 200 **χγ.**

III. Αν ς' έναν απο τυς προςθετέυς προςθέςυμε οπιοδίποτε αριθμο, κε ςινάμα απο τον άλο προςθετέο αφερέςυμε τον ίδιο αριθμο, τότε το άθριζμα δεν αλάζι.

§ 10. Μεταβολι τις διαφορας.

1. Ι κοπερατίβα ίνε ανάνκι να έχι απόθεμα αλέβρυ 32 **τς.** Πίρε μονάχα 24 **τς.** Πόςα τςέντνερα άλεβρα πρέπι να πάρι ακόμα ι κοπερατίβα;

Λίςι. 32 — 24 = 8 **τς.**

Στο παράδιγμα αφτο ο αριθμος 32 ίνε ο μιοτέος, ο αριθμος 24 ο αφερετέος, ο 8 ίνε το ιπόλιπο.

Πός θα αλάχςι το ποςο αφτο, αν θα ίνε ανάνκι να αφχςίςι ι κοπερατίβα το απόθεμά-τις κατα 6 **τς;** Να τα ελατόςι κατα 6 **τς;**

Οταν ο μιοτέος αφχςάνι κατα 6 **τς,** τότε κε ι διαφορα θα αφχςιθι κατα 6 **τς;** Ενοίτε πος ι ελάτοςι τυ μιοτέυ κατα 6 **τς** ελατόνι κε τι διαφορα κατα 6 **τς.** Εδο έχυμε παραδίγματα ελάτοςις κε άφχςιςις τυ μιοτέυ.

I. Αν αφχςίςυμε το μιοτέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε ι διαφορα αφχςάνι κατα τον ίδιο αριθμο.

II. Αν ελατόςυμε το μιοτέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε ι διαφορα ελατόνετε κατα τον ίδιο αριθμο.

2. Πός αλάζι το ποςο τον αλέβρον, πυ έχι να πάρι ι κοπερατίβα (προιγύμενο παράδιγμα), αν δόςυνε ς' αφτι 3 **τς** περιςότερο; ίτε 3 **τς** λιγότερο;

Στιν πρότι περίπτοςι ο αφερετέος αφχςίθικε κατα 3. Μπορύμε να βεβεοθύμε, πος ι διαφορα θα ελατοθι κατα 3 κε θα αποτελέςι 5 **τς.** Στι δέφτερι περίπτοςι ο αφερετέος θα ελατοθι κατα 3, ενο ι διαφορα θα αφχςιθι κατα 3, κε θα αποτελέςι 11 **τς.**

I. Αν αφχςίςυμε τον αφερετέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε ι διαφορα ελατόνετε κατα τον ίδιο αριθμο.

II. Αν ελατόςυμε τον αφερετέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε ι διαφορα αφχςάνι κατα τον ίδιο αριθμο.

3. Να βρεθι ι διαφορα 1200 — 800. Πός θ' αλάχςι ι διαφορα, αν θα αφχςίςυμε ςινάμα κε το μιοτέο κε τον αφερετέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο; Ι διαφορα απο αφτο δεν αλάζι. Επίςις δεν αλάζι κε απο τιν ελάτοςι τυ μιοτέυ κε αφερετέυ κατα ένα κε τον ίδιο αριθμο.

$$1200 - 800 = 1300 - 900 = 1000 - 600 = 400.$$

Εδο στιν πρότι περίπτοςι κε ι διο αριθμι έχυν αφχςιθι κατα 100, ενο ςτι δέφτερι περίπτοςι έχυν ελατοθι κατα 200.

Αν αφχςίςυμε ίτε ελατόςυμε το μιοτέο κε τον αφερετέο κατα ένα κε τον ίδιο αριθμο, ι διαφορα δεν αλάζι.

§ 11. Αφέρεςι αθρίζματος. Πρόςθεςι κε αφέρεςι διαφορας.

1. Απο τα 250 ρύβλια πυ πίρα, πλίροςα για το δάνιο 25 ρύβλ. κε αγόραςα 50 ρυβλ. πράματα. Πόςα χρίματα μυ έμιναν;

Λίςι. Ι λίςι μπορι να γίνι με διο τρόπυς:

1) αφερύμε απο τα 250 ρύβλ. το γενικο άθριζμα τον εχςόδον.

$$250 - (25 + 50) = 250 - 75 = 175 \text{ ρύβλ.}$$

2) αφερύμε τον ένα κατόπιν τυ άλυ κε τυς διο αριθμυς:

$$250 - 25 - 50 = 175 \text{ ρύβλ.}$$

Γράφοντας τιν ιςότιτα τον διο εχςαγομένον, θα έχυμε τον κανόνα τις αφέρεςις αθρίζματος:

$$250 - (25 + 50) = 250 - 25 - 50 = 175.$$

I. Για να αφερέςυμε απο ένα οπιοδίποτε αριθμο το άθριζμα αριθμον, μπορύμε να αφερέςυμε απο το δομένο αριθμο τον καθένα προςθετέο χοριςτα, τον ένα ίςτερα απ' τον άλο.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a - (b + c) = a - b - c.$

Ο τελεφτέος κανόνας διεφχολίνι τιν αφέρεςι, όταν πρέπι να αφερέςυμε κάμποςυς αριθμυς απο ένα κε τον αφτο αριθμο.

2. Να αφερεθυν: 420 — 103 — 65 — 42 — 17.

Λίςι. Θα αφερέςυμε το άθριζμα όλον τον αριθμον, πυ πρέπι να αφερεθυν. Ι πράχςι αφτι θα αντικαταςτίςι τέςερες διαδοχικες αφερέςις:

$$420 - (103 + 65 + 42 + 17) = 420 - 227 = 193.$$

Στο ίδιο αποτέλεζμα θα καταλίχςυμε, αν τον ένα κατόπι τυ άλυ αφερέςυμε κε τυς τέςερες αριθμυς:

$$420 - 103 - 65 - 42 - 17 = 193.$$

3. Ενας ςοφερ πίρε 250 ρύβλ. μιςθο, 80 ρύβλια βραβία κε τυ κρατίςανε για το δάνιο 25 ρύβλ. Πόςα ρύβλια πίρε μετριτα;

Λίςι. Μπορύμε να λίςυμε το πρόβλιμα αφτο με δίο τρόπυς:

1) 250 + 80 — 25 = 305 ρύβλια.
2) 250 + (80 — 25) = 250 + 55 = 305 ρύβλια.

Στιν τελεφτέα λίςι αμέςος προςθέςαμε τι διαφορα τυ βραβίυ, πυ πίρε, κε κίνα πυ τυ κρατίςανε. Καταλίχςαμε ςτο ίδιο αποτέλεζμα.

II. Για να προςθέςυμε ς' έναν οπιοδίποτε αριθμο τι διαφορα διο αριθμον, μπορύμε να προςθέςυμε ςτον αριθμο αφτο τον μιοτέο κε να αφερέςυμε τον αφερετέο.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a + (b - c) = a + b - c$.

Αν αλάχςυμε το πρόβλιμα, τότε μπορύμε να έχυμε τον κανόνα για τιν αφέρεςι τις διαφορας.

4. Πλιρόςανε ς' ένα τραχτορίςτα 250 ρύβλ. μιςθο, 40 ρύβλ. βραβίο κε τυ κρατίςανε 60 ρύβλια για προιόντα, πυ πίρε. Πόςα ρύβλια πίρε μετριτα;

Λίςι. I τρόπος: 250 — 60 + 40 = 230 ρύβλ.
II τρόπος: 250 — (60 — 40) = 230 ρύβλ.

Κατα τι δέφτερι λίςι αμέςος αφερύμε τι διαφορα τον βραβίον κε τις κρατίςις. Κε ι διο τρόπι δίνυν το ίδιο εχςαγόμενο.

$$250 - (60 - 40) = 250 - 60 + 40.$$

III. Για να αφερέςυμε απο ένα οπιοδίποτε αριθμο τι διαφορα διο άλον, αφερύμε απο τον αριθμο αφτο τον μιοτέο κε προςθέτυμε τον αφερετέο.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a - (b - c) = a - b + c$.

§ 12. Αφέρεςι ακέρεον αριθμον.

1. Τιν αφέρεςι οπιοδίποτε αριθμον τιν κάνυνε ςίμφονα με τυς κανόνες τις αφέρεςις τυ αθρίζματος.

$$8426 - 5312 = 8426 - (5000 + 300 + 10 + 2) = 8426 - (2 + 10 + 300 + 5000) = 8426 - 2 - 10 - 300 - 5000 = 8424 - 10 - 300 - 5000 = 8414 - 300 - 5000 = 8114 - 5000 = 3114.$$

Σίντομα γράφυν τυς αριθμυς τον ένα κάτο απ' τον άλο κε αμέςος κάνυν τιν αφέρεςι κατα τάχςι.

$$\begin{array}{r} 8426 \\ -\,5312 \\ \hline 3114 \end{array}$$

Διςκολίες απαντύμε μονάχα τότε, όταν ο αριθμος τον μονάδον κάπιας τάχςις τυ μιοτέυ ίνε μικρότερος απο τον αριθμο τον μονάδον τις ίδιας τάχςις τυ αφερετέυ.

2. Να αφερεθι: 6948 — 5173.

Εδο απο τις 4 δεκάδες τυ μιοτέυ πρέπι να αφερεθυν ι 7 δεκάδες τυ αφερετέυ. Αφτο δεν ίνε δινατο να γίνι. Τότε δανίζοντε μια μονάδα απο τι γιτονικι ανότερι τάχςι τυ μιοτέυ, ς' αφτι τιν περίπτοςι μια εκατοντάδα, τιν κάνυνε δεκάδες κε προςθέτυν αφτες ςτις 4 δεκάδες τυ μιοτέυ:

Τότε έχυμε: 10 + 4 = 14 δεκάδες, αφερυν: 14 — 7 = 7 δεκάδες.

Κατα τιν γραφτι διατίποςι τιν πράχςι αφτι τιν κάνυν απο μνίμις, κε κίνα, πυ δανίζοντε, τα ςιμόνυν με τελία πάνο ςτο ψιφίο τις τάχςις, απο τιν οπία δανιςτίχανε τι μονάδα. Κατόπι αφερύνε τι μια εκατοντάδα τυ αφερετέυ όχι απο τις 9, αλα απο τις 8 εκατοντάδες τυ μιοτέυ.

Να πός το γράφυν:

$$\begin{array}{r} 6\dot{9}48 \\ -\,5173 \\ \hline 1775 \end{array}$$

Εδο απο μνίμις προςθέςαμε 10 δεκάδες στις 4 δεκάδες του μιοτέυ κε αφερέςαμε 1 εκατοντάδα απο τις εκατοντάδες τυ μιοτέυ. Ο μιοτέος απ' αφτο δεν άλαχςε.

Ας δόςυμε ακόμα παραδίγματα αφέρεςις.

1.
$$\begin{array}{r} 4058 \\ -\ 2723 \\ \hline 1335 \end{array}$$

Εδο ανανκαζόμαςτε να προςθέςυμε μια χιλιάδα, ίτε 10 εκατοντάδες, στις εκατοντάδες τυ μιοτέυ κε να ελατόςυμε κατα μια χιλιάδα τις χιλιάδες τυ μιοτέυ.

2.
$$\begin{array}{r} 140\,072 \\ -\ 58\,391 \\ \hline 81\,681 \end{array}$$

Εδο δανιζόμαςτε απο τις 4 δεκάδες τον χιλιάδον μια δεκάδα χιλιάδον κι απ' αφτι μια χιλιάδα, δηλ. 10 εκατοντάδες προςθέτυμε στις εκατοντάδες, κε τις ιπόλιπες 9 χιλιάδες — στις χιλιάδες.

Για να αφερέςυμε διο αριθμυς, γράφυμε τον αφερετέο κάτο απο το μιοτέο, έτςι όςτε ι μονάδες κάθε μιας τάκςις να βρεθυν στιν ίδια ςτίλι. Για να βρύμε το πςιφίο τον μονάδον ςτι διαφορα, αφερύμε τον αριθμο τον μονάδον τυ αφερετέυ απο τις μονάδες τυ μιοτέυ τις αντίςτιχις ςιρας. Αν όμος ι μονάδες τυ αφερετέυ δεν αφερύντε απο τις μονάδες τυ μιοτέυ, τοτε ςτις μονάδες τυ μιοτέυ προςθέτυμε 10 κε ελατόνυμε κατα 1 τον αριθμο τον μονάδον τις γιτονικις ανότερις τάκςις (τον δεκάδον). Ετςι εκςακολυθύμε τιν πράκςι με τις δεκάδες, εκατοντάδες κ. τ. λ. ός το τέλος.

§ 13. Δοκιμι τις πρόςθεςις.

Δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν πρόςθεςι. Για τιν δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν πρόςθεςι χριςιμοπιυν τον αντιμεταθετικο νόμο τις πρόςθεςις ος εκςις: προςθέτυν ακόμα μια φορα όλυς τυς προςθετέυς, αλα με άλι ςιρα. Πρέπι να βρεθι το ίδιο άθριζμα.

Κάνετε τι δοκιμι τις πρόςθεςις: $327 + 516 = 843$.

Λίςι. Μεταθέτοντας τυς προςθετέυς, έχυμε:

$$516 + 327 = 843.$$

Ι πράκςι ίνε ςοςτι, επιδι έχυμε το ίδιο άθριζμα.

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν πρόςθεςι, πρέπι να κάνυμε άλι μια φορα τιν πρόςθεςι μεταθέτοντας τυς προςθετέυς.

Δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν αφέρεςι. Να βρεθι το άθριζμα κε να γίνι ι δοκιμι τις λίςις: $3573 + 8949$

Λίςι. $3573 + 8949 = 12\,522$.

Δοκιμι. Κςέρυμε, πος ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι ίνε πράκςις αμιβέα αντίςτροφες. Γι' αφτο, αφερόντας απο το άθριζμα τον ένα απο τυς προςθετέυς, πρέπι να βρίςκυμε τον δέφτερο προςθετέο.

$$12\,522 - 3573 = 8949.$$

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν αφέρεςι, πρέπι να αφερέςυμε απο το άθριζμα τον ένα προςθετέο κε τότε πρέπι να βρύμε τον άλον προςθετέο.

§ 14. Δοκιμι τις αφέρεςις.

Θεορόντας τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι ος αμιβέα αντίςτροφες πράκςις, βρίςκυμε απλυς τρόπυς δοκιμις τις αφέρεςις.

Δοκιμι τις αφέρεςις με πρόςθεςι. Να βρεθι ι διαφορα κε να γίνι ι δοκιμι τις ορθότιτας τις λίςις: $1080 - 935$.

Λίςι. $1080 - 935 = 145$.

Ο τρόπος τις δοκιμις βαςίζετε ςτο ότι ο μιοτέος ίνε το άθριζμα, ενο ο αφερετέος κε ι διαφορα ίνε προςθετέι.

Προςθέτοντας τον αφερετέο κε τι διαφορα δηλ. 935 κε 145, πρέπι να βρύμε το μιοτέο — το άθριζμα 1080.

$$935 + 145 = 1080.$$

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις αφέρεςις με τιν πρόςθεςι, πρέπι να προςθέςυμε τον αφερετέο κε τι διαφορα κε πρέπι να βρύμε το μιοτέο.

Ι δοκιμι τις αφέρεςις με αφέρεςι. Τιν ορθότιτα τις αφέρεςις μπορύμε να τιν εκςακριβόςυμε κςανα με αφέρεςι εποφελύμενι, το ότι ο αφερετέος (ένας προςθετέος) ίνε ίςος με το μιοτέο (άθριζμα) πλιν τι διαφορα (τον άλο προςθετέο). Ι τελεφτέα ιςότιτα δίνι τιν δοκιμι τις αφέρεςις με αφέρεςι.

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις αφέρεςις με αφέρεςι πρέπι να αφερέςυμε απ' το μιοτέο το ιπόλιπο κε πρέπι να βρύμε τον αφερετέο.

§ 15. Αφέρεςι με ςιμπλίροςι.

Ι αφέρεςι με ςιμπλίροςι ςτιρίζετε ςτις ιδιότιτες τον αντίςτροφον πράκςεον. Αφτυς μπορύμε να εποφελιθύμε τον κερο πυ κάνυμε λογαριαζμο απο μνίμις, κε κατα τι γραφτι αφέρεςι οπιονδίποτε αριθμον.

Ας κάνυμε με το ςινιθιζμένο τρόπο αφέρεςι κε πρόςθεςι:

1. $\begin{array}{r} 849 \\ -514 \\ \hline 335 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 514 \\ +335 \\ \hline 849 \end{array}$

Μπορύμε να κάνυμε τιν ακόλυθι ςκέπςι:

πόςες μονάδες πρέπι να προςθέςυμε ςτις 4 μονάδες, για να βρύμε 9; Ινε ολοφάνερο 5. Πόςες δεκάδες ςτι 1 δεκάδα για να βρύμε 4; Ινε ολοφάνερο 3. Πόςες εκατοντάδες ςτις 5 εκατοντάδες, για να βρύμε 8; Ινε ολοφάνερο 3.

Ι λίςι γράφετε κατα το ςινιθιζμένο τρόπο.

Θα έχυμε μερικες διςκολίες ςτιν περίπτοςι εκίνι, όταν ο αριθμος τον μονάδον κάπιας τάκςις τυ αφερετέυ ίνε μεγαλίτερος τυ αριθμυ τις ίδιας τάκςις τυ μιοτέυ.

2. $\begin{array}{r} 753 \\ -738 \\ \hline 15 \end{array}$

Στιν περίπτοςι αφτι ι ερότιςι μπένι έτςι: πόςο πρέπι να προςθέςυμε ςτον 8, για να βρύμε τον πλιςιέςτερο ςτον 8 αριθμο, πυ να τελιόνι ςε 3; Απάντιςι: 5, επιδι $5 + 8 = 13$. Στι θέςι τον μονάδον γράφυν 5, κε τι δεκάδα, πυ έχι προκίπςι τιν έχυν ιπό-

πςι. Σινεχίζοντας, θα αφκςίςυμε τις 3 δεκάδες τυ αφερετέυ ός 4, κι όχι ός 5.

Τον τρόπο αφτο τον εφαρμόζυν κε κατα τιν αφέρεςι κάμποςον αριθμόν.

3. Ι ςιμπλίροςι κάθε αριθμυ όςπυ να φτάςι μια μονάδα τις ανότερις τάκςις, γίνετε τόςο απλα, όςτε το εκςαγόμενο μπορύμε να το γράπςυμε απο τα αριςτερα ςτα δεκςια. Κάθε πςιφίο τυ αφερετέυ το ςιμπλιρόνυμε ός το 9, εχτος απο το τελεφτέο πςιφίο, το οπίο ςιμπλιρόνυμε ός το 10.

Μ' αφτον τον τρόπο ας κάνυμε τις ακόλυθες αφερέςις:

$$1000 - 475 = 525,$$
$$1\,000\,000 - 512\,097 = 487\,903,$$
$$100\,000 - 81\,963 = 18\,037,$$
$$10\,000 - 5\,920 = 4080.$$

§16. Στρονκίλεμα τον αριθμον.

Ο πλιθιζμος τον πόλεον τις ΕΣΣΔ αφκςάνι γλίγορα. Παράδιγμα ας πάρυμε το Μπακυ, πυ ςτα 1913 ίχε 333 958 κατίκυς, ςτα 1920 255 566 κατίκυς, ςτα 1926 — 453 333 κατίκυς, ςτα 1931 — 589 634 κατίκυς. Να βρεθι, πιά απο τις παραπάνο περιόδυς έδοςε τιν μεγαλίτερι άφκςιςι τον κατίκον τυ Μπακυ.

Για να λίςυμε το πρόβλιμα, δεν ίνε ανάνκι να πάρυμε ακριβις αριθμυς, πυ έχυν δοθι ςτο πρόβλιμα. Εχτος απο αφτο, ακόμα κι' αφτυς τυς αριθμυς δεν μπορύμε να τυς λογαριάςυμε ακριβις. Γι' αφτο θα ίνε πιο ςοςτο να κάνυμε το λογαριαζμό-μας με τις χιλιάδες, χορις να δόςυμε προςοχι ςτις εκατοντάδες, ςτις δεκάδες κε ςτις μονάδες, επιδι ι αριθμι αφτον τον τάκςεον, όταν λογαριάζυμε τυς κατίκυς μιας τέτιας μεγάλις πόλις ςαν το Μπακυ, ταλαντέβετε απο μέρα ςε μέρα. Ενας τέτιος τρόπος αντικατάςταςις ενος αριθμυ με άλον αριθμο, πυ να περιέχι λιγότερα ςιμαντικα πςιφία, ονομάζετε ςτρονκίλεμα.

Στρονκιλέβοντας τυς αριθμυς τυ προβλίματος ςε χιλιάδες, θα έχυμε:

1913 — 334 000 κατίκυς, 1920 — 256 000 κατίκυς, 1926 — 453 000 κατίκυς, 1931 — 590 000 κατίκυς.

Απ' τα 1913 ός τα 1926 ι κάτικι αφκςίθικαν κατα 119 000 ανθρόπυς.

Απ' τα 1926 ός τα 1931 ι κάτικι αφκςίθικαν κατα 137 000 ανθρόπυς.

Στιν τελεφτέα περίεδο ο πλιθιζμος άφκςενε γλιγορότερα απ' ότι ςτιν πρότι περίοδο.

Στα προβλίματα με ςτρονκιλυς αριθμυς πάντα πρέπι να ιποδίχνετε, ςε μονάδες πιάς τάκςις έχι ςτρονκιλέπςι ο αριθμος. Πολες φορες ι ιπόδικςι αφτι ιπάρχι μέςα ςτυς όρυς τυ προβλίματος.

I. Κατα το ςτρονκίλεμα ακέρεον αριθμον ςε μονάδες οπιαςδίποτε τάκςις, τα πςιφία όλον τον τάκςεον, πυ βρίςκοντε ςτα δεκςια τις ςτρονκιλεβόμενις τάκςις, τα αντικαταςτατένυνε με μιδενικα.

Αν το πρότο πςιφίο, πυ αντικαταςτένυμε με μιδενικο, ίνε μεγαλίτερο τυ 5 ίτε ίςο με το 5, τότε το πςιφίο, πυ ςτέκετε ςτ' αριςτερά-τυ το αφκςένυν κατα μια μονάδα, αν ίνε μικρότερο τυ 5, τότε δεν αλάζυν το αριςτερο πςιφίο.

Παραδίγματος χάριν, ο αριθμος 437 926 μετα το ςτρονκίλεμα ςε χιλιάδες θα γίνι: 438 000· ο αριθμος 284 631 μετα το ςτρονκίλεμα ςε εκατοντάδες θα γίνι 284 600· ο αριθμος 396 754 μετα το ςτρονκίλεμα ςε εκατοντάδες θα γίνι: 396 800.

Ο πρότος αριθμος έχι ςτρονκιλέπςι ός τιν τάκςι τον χιλιάδον, ο δέφτερος κε ο τρίτος ός τιν τάκςι τον εκατοντάδον.

II. Αν το πρότο πςιφίο, πυ αντικαταςτένυμε με μιδενικο ιςύτε με 5, κε άλα πςιφία δεν ακολυθύνε, τότε το ςτρονκιλέβυμε έτςι, όςτε το πςιφίο πυ βρίςκετε ςτα αριςτερα τυ 5 να μιν αλάκςι, αν ίνε άρτιο (ζιγο), ίτε το αφκςένυμε κατα μια μονάδα, αν ίνε περιτος αριθμος (μονο).

Παραδίγματος χάριν, ο αριθμος 2485 ίςτερα απο το ςτρονκίλεμα τον δεκάδον, γίνετε 2480.

Ο αριθμος 19 635, ίςτερα απ' τον ςτρονκίλεμα τον δεκάδον, γίνετε 19 640.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Για να δίκςυν ιςότιτα κατα προςένκιςι διο αριθμον ίτε παραςτάςεον, τις ενόνυν με το ςιμίο $\simeq$· π.χ. $x \simeq 1800$ διαβάζετε έτςι: το x κατα προςένκιςι ιςότε με το 1800.

IV. ΠΟΛΑΠΛΑΣΙΑΖΜΟΣ ΚΕ ΔΙΕΡΕΣΙ ΑΚΕΡΕΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Πολαπλαςιαζμος.

1. Ενα εργοςτάςιο αφτοκινίτον έβγαλε τιν πρότι μέρα τις δεκαμερίας 127 αφτοκίνιτα κε τι δέφτερι μέρα 127 κ. υ. κ. ςε διάςτιμα 8 ιμερον εργαςίας. Πόςα αφτοκίνιτα έβγαλε το εργοςτάςιο ς' αφτες τις 8 ιμέρες;

Λ ί ς ι. Για να λίςυμε το πρόβλιμα αφτο, πρέπι να επαναλάβυμε οχτο φορες τον αριθμο 127, ςαν προςθετέο. Σίντομα το γράφυμε έτςι:

$$127 \times 8 = 1016,$$

διλ. ο 127 πολαλπαςιάζετε επι 8.

Τέτια πράκςι, πυ ςιντομέβι τιν πρόςθεςι, ονομάζετε π ο λ α π λ α ς ι α ζ μ ο ς.

Ο αριθμος 127 ονομάζετε π ο λ α π λ α ς ι α ς τ έ ο ς, ο αριθμος 8 π ο λ α π λ α ς ι α ς τ ι ς κε ο αριθμος 1016 γ ι ν ό μ ε ν ο.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Το να πολαπλαςιάζυμε ένα δομένο αριθμο επι οπιοδίποτε άλον ακέρεο αριθμο, ςιμένι να επαναλάβυμε τον πολαπλαςιαςτέο ος προςθετέο τόςες φορες, όςες μονάδες περιέχι ο πολαπλαςιαςτις, κε να βρύμε το εκςαγόμενο άθριζμα.

Ος ςιμία τυ πολαπλαςιαζμυ χριςιμέβυν:

1) Ο πλάγιος ςταβρος: $42 \times 3 = 126$ κε 2) ι τελία: $16 \cdot 7 = 112$.

Το ςιμίο τυ πολαπλαςιαζμυ μπορι κε να μι μπι μπροςτα ςτυς παράγοντες με τα γράματα.

Γράφυν: 1) ab αντις $a \cdot b$· 2) $5x$ αντις $5 \cdot x$.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Πολαπλαςιαςτέο ονομάζυν εκίνον τον αριθμο τον οπίο πολαπλαςιάζυν. Πολαπλαςιαςτι ονομάζυν εκίνον τον αριθμο, επι τον οπίον πολαπλαςιάζυν. Γινόμενο ονομάζυν εκίνο τον αριθμο, πυ προκίπτι απο τον πολαπλαςιαζμο.

Σ ι μ ί ο ς ι. Τον πολαπλαςιαςτέο κε τον πολαπλαςιαςτι, τυς ονομάζυν κε π α ρ ά γ ο ν τ ε ς.

Γραφτι παράςταςι τυ πολαπλαςιαζμυ με γράματα: $a \cdot b = q$.

Τα γράματα a κε b παραςτένυν τυς παράγοντες, κε το γράμα q το γινόμενο.

2. Να βρεθι το γινόμενο: α) 1·8, β) 7·1, γ) 1·1, δ) 0·7.

Λ ί ς ι. α) $1 \cdot 8 = 8$, β) $7 \cdot 1 = 7$, γ) $1 \cdot 1 = 1$, δ) $0 \cdot 7 = 0$.

Ι λίςις αφτες μας επιτρέπυν να κάνυμε τα ακόλυθα ςιμπεράζματα.

Το γινόμενο τις μονάδας επι οπιοδίποτε αριθμο, κε ςινάμα το γινόμενο οπιυδίποτε αριθμυ επι τιν μονάδα, ιςύτε με τον ίδιο αριθμο.

Το γινόμενο ιςύτε με μιδενικο αν ένας απ' τυς παράγοντες ίνε μιδενικο.

Να βρεθι ο όνκος τυ δοματίυ, αν το μάκρος τυ δοματίυ ίνε 8 **μ**, το πλάτος 3 **μ** κε το ίπςος 4 μ.

Λ ί ς ι: Στιν περίπτοςι αφτι για να βρύμε τον όνκο πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το μάκρος επι το πλάτος κε επι το ίπςος:

$(8 \cdot 3 \cdot 4)$ **κιβ. μ.**

Για τιν έβριςι τυ γινόμενυ τριον δομένον παραγόντον, πρέπι να πάρυμε το γινόμενο $8 \cdot 3 = 24$, κε κατόπι να βρύμε το γινόμενο $24 \cdot 4 = 96$. Τότε θάχυμε:

$8 \cdot 3 \cdot 4 = 96$ **κιβ. μ.**

Ο ρ ι ς μ ο ς. Γινόμενο τριον αριθμον ονομάζυν τον αριθμο εκίνο, πυ προκίπτι απο τον πολαπλαςιαζμο τυ γινόμενυ τον διο αριθμον επι τον τρίτο.

§ 2. Προβλίματα, πυ λίνοντε με πολαπλαςιαζμο.

1. Σ' ένα κολχόζι μαζέπςανε τα κοχινογύλια ςε 26 μέρες· κάθε μέρα κατα μέςο όρο μαζέβανε απο 4 εχτάρια. Πόςα εχτάρια κοχινογυλιον έχυν μαζέπςι;

Λ ί ς ι. $4 \cdot 26 = 104$ **εχτ.** Το πρόβλιμα λίνετε με τον πολαπλαςιαζμο. Εδο ο πολαπλαςιαζμος αντικαταςτένι τιν πρόςθεςι ίςον προςθετέον.

2. Στο κολχόζι μπίκαν 120 νικοχιρια. Μετα ένα χρόνο ο αριθμος τον νικοχιριον, πυ μπίκαν ςτο κολχόζι, αφκςίθικε τρις φορες. Πόςα νικοχιρια ίνε τόρα ςτο κολχόζι;

Κε αφτο το πρόβλιμα λίνετε με τον πολαπλαςιαζμο: $120 \cdot 3 = 360$ νικοχιρια.

Εδο αφκςίςαμε τον αριθμο κάμποςες φορες.

Μέςον τυ πολαπλαςιαζμυ επι ακέρεο αριθμο, λίνοντε προβλίματα ςτα οπία πρέπι· 1) Να βρεθι το άθριζμα κάμποςον ίςον προςθετέον· 2) να αφκςιθι ένας αριθμος κάμποςες φορες.

§ 3. Ι νόμι τυ πολαπλαςιαζμυ.

1. Α ν τ ι μ ε τ α θ ε τ ι κ ο ς ν ό μ ο ς. Να πολαπλαςιαςτυν 1) $3 \cdot 5$, 2) $2 \cdot 3 \cdot 7$.

Αν θα βρύμε το γινόμενο μεταθέτοντας με όλυς τυς τρόπυς τυς παράγοντες κε παραβάλυμε τ' αποτελέζματα θάχυμε:

1) $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

Αν αλάκςυμε τι θέςι διο παραγόντον μετακςίτυς το γινόμενο δεν αλάζι.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a \cdot b = b \cdot a$.

Ο ίδιος κανόνας ιςχίι κε για περιςότερυς παράγοντες:

2) $2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 7 \cdot 2 = 42$.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$.

2. Σ ι ν δ ι α ς τ ι κ ο ς ν ό μ ο ς τ υ π ο λ α π λ α ς ι α ζ μ υ. Πόςες λίτρες πετρέλεο χορι ςε ορθογόνιο δοχίο μάκρυς 4 **μ**, πλάτος 3 **μ** κε ίπςος 2 **μ**;

Για να βρύμε τι χοριτικότιτα τυ δοχίυ πρέπι να κάνυμε πολαπλαςιαζο κε να βρύμε το γινόμενο $4 \cdot 3 \cdot 2$. Ας βρύμε πρότα το γινόμενο $4 \cdot 3$ κε ας το πολαπλαςιάςυμε επι 2. Θα έχυμε:

$(4 \cdot 3) \cdot 2 = 24$ **κιβ. μ** $= 24\,000$ **κιβ. ντμ** $= 24\,000$ **λ.**

Ας πολαπλαςιάςυμε τόρα τυς αριθμυς αφτυς με άλι ςιρα:

$2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$ **κιβ. μ.**

Το εκςαγόμενο ίνε το ίδιο.

Το γινόμενο πολον παραγόντον δεν αλάζι, αν ενόςυμε τυς παράγοντες ςε οπιεςδίποτε ομάδες.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3. Το ακόλυθο παράδιγμα δίχνι, πόςο απλυςτέβι κάποτε τυς λογαριαζμύς-μας ι ιδιότιτα αφτι τυ γινομένυ.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = ;$

Λ ί ς ι: Αν θα κάνυμε τον πολαπλαςιαζμο με τι ςιρα αφτι, θα έχυμε γινόμενο 600. Ας κάνυμε τιν ίδια πράκςι με άλι ςιρα:

$(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3) = 10 \cdot 10 \cdot 6 = 600$.

Το εκςαγόμενο ίνε το ίδιο, μα ι πράκςις-μας έχυν διεφκολινθί.

4. Επιμεριςτικος νόμος. Πόςα χιλιόγραμα τενεκε χριάζετε, για να ςκεπάςυμε τι ςτέγι αποθίκις, πυ έχι τρις πλαγιες: με διαςτάςις 2 **τετρ. μ**, 12 **τετρ. μ.** κε 2 **τετρ. μ** (1 **τετρ. μ** φίλο τενεκε ζιγίζι 5 **χγ**);

Λίςι. Το γενικο εμβαδο τις ςτέγις: $2 + 12 + 2 = 16$ **τετρ. μ.** Για να βρύμε το βάρος τυ τενεκε, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το βάρος τυ 1 **τετρ. μ** επι τον γενικο αριθμο τον τετραγονικον μέτρον: $5 \cdot 16 = 80$ **χγ**.

Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε κε κατ' άλο τρόπο: να βρύμε το βάρος τυ τενεκε, πυ ίνε απαρέτιτος για κάθε πλαγια τις ςτέγις, κε κατόπιν να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα. Θάχυμε:

$$2 \cdot 5 + 12 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 10 + 60 + 10 = 80 \text{ χγ}.$$

Το αποτέλεζμα ίνε το ίδιο.

5. Ας πολαπλαςιάςυμε $(27 + 13 + 4) \cdot 5$ με διο τρόπυς:

1) προςθέτυμε όλυς τυς προςθετέυς τις παρένθεςις κε το άθριζμα το πολαπλαςιάζυμε επι 5.

2) πολαπλαςιάζυμε κάθε προςθετέο χοριςτα επι 5 κε προςθέτυμε τα εκςαγόμενα τυ πολαπλαςιαζμυ. Κε ςτις διο περιπτόςις έχυμε το ίδιο εκςαγόμενο: 220.

Για να πολαπλαςιάςυμε άθριζμα επι οπιοδίποτε αριθμο, αρκι να πολαπλαςιάςυμε καθένα προςθετέο χοριςτα επι τον αριθμο κε να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα.

Αφτο με γράματα γράφετε: $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

§ 4. Πολαπλαςιαζμος επι γινόμενο κε πολαπλαςιαζμος γινομένυ.

1. Να βρεθι το βάρος τον τύβλον ενος τίχυ, πυ έχι διαςτάςις 5 **μ**, 8 **μ** κε 2 **μ** κε το βάρος 1 **κιβ. μ** τύβλον 18 **τς**.

Λίςι. Για να λίςυμε το πρόβλιμα αφτο, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το βάρος 1 **κιβ. μ** τίχυ επι τον αριθμο τον κιβικον μέτρον τυ όνκυ.

$$18 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 90 \cdot 8 \cdot 2 = 720 \cdot 2 = 1440 \text{ τς}$$

Τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ μπορύμε να τι γράπςυμε κε αλιότικα.

Βρίςκυμε πρότα τον όνκο τυ τίχυ: $5 \cdot 8 \cdot 2 = 80$ **κιβ. μ**, έπιτα το βάρος-τυ: $18 \cdot 80 = 1440$ **τς**.

Τα εκςαγόμενα ίνε ίςα: $18 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 18 \cdot 80$, όπυ ο 80 ίνε γινόμενο τον αριθμον $5 \cdot 8 \cdot 2$.

Για να πολαπλαςιάςυμε έναν αριθμο επι το γινόμενο άλον κάμποςον αριθμον, αρκι να γράπςυμε τον πολαπλαςιαςτέο ςαν παράγοντα ςτο γινόμενο κε κατόπιν να πολαπλαςιάςυμε ςίμφονα με τον κανόνα τις έβρεςις τυ γινομένυ κάμποςον παραγόντον.

Παρατίριςι. Γράφοντας τι λίςι τυ προβλίματος, βρίκαμε το γινόμενο $18 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 1440$. Γινόμενο ονομάζετε τόςο το δεκςιο, όςο κε το αριςτερο μέρος τις ιςότιτας.

2. Να βρεθι το γινόμενο $(3 \cdot 5 \cdot 6) \cdot 8$.

Παρατίριςι. Ι παρενθέςις δίχνυν, πος ι πράκςις, πυ βρίςκοντε μέςα ς' αφτες, πρέπι να γίνυν προτίτερα απο τις άλες πράκςις.

Λίςι. Τον πολαπλαςιαζμο αφτο μπορύμε να τον γράπςυμε κε ος εκςις:

$$(3 \cdot 5 \cdot 6) \cdot 8 = 3 \cdot 5 \cdot (6 \cdot 8) = 3 \cdot (5 \cdot 8) \cdot 6 = (3 \cdot 8) \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Τα γινόμενα ς' όλες αφτες τις περιπτόςις θα ίνε ίςα.

Για να πολαπλαςιάςυμε γινόμενο κάμποςον αριθμον επι οπιονδίποτε άλον αριθμο, αρκι να πολαπλαςιάςυμε επι τον αριθμο αφτο έναν απο τυς παράγοντες, αφίνοντας όλυς τυς άλυς όπος ίνε.

§ 5. Πολαπλαςιαζμος αθρίζματος κε διφορας.

Τον χερο πυ μαθέναμε τις ιδιότιτες τον πράκςεον, ςιχνα γράφαμε το άθριζμα, τι διαφορα κε το γινόμενο, χορις να τελιόνυμε τιν πράκςι.

1. Να γραφι: το άθριζμα τον αριθμον 23 κε 15 να πολαπλαςιαςτι επι 6.

Λίςι. $(23 + 15) \cdot 6 = 38 \cdot 6 = 228$.

Εποφελύμενι τον επιμεριςτικο νόμο τυ πολαπλαςιαζμυ μπορύμε να κάνυμε τέτια λίςι:

$$(23 + 15) \cdot 6 = 23 \cdot 6 + 15 \cdot 6 = 138 + 90 = 228.$$

2. Να γραφι ι διαφορα τον αριθμον 37 κε 14 να πολαπλαςιαςτι επι 9.

Λίςι. $(37-14)\cdot 9=26\cdot 9=207.$

Παρατίριςι. Τις παραςτάςις $(23+15)$ κε $(37-14)$ τις ονομάζυμε άθριζμα κε διαφορα. Γι' αφτο τιν παράςταςι $(23+15)\cdot 6$, μπορύμε να τιν ονομάςυμε γινόμενο αθρίζματος επι τον αριθμο 6, κε τιν παράςταςι $(37-14)\cdot 9$ μπορύμε να τιν ονομάςυμε γινόμενο διαφορας επι τον αριθμο 9.

3. Ας δίχςυμε πός να πολαπλαςιάςυμε διαφορα επι οπιονδίποτε αριθμο:

$$(7-4)\cdot 9=3\cdot 9=27,$$

ίτε:

$$(7-4)\cdot 9=7\cdot 9-4\cdot 9=63-36=27.$$

Σινκρίνοντας τις λίςις μπορύμε να γράπςυμε:

$$(7-4)\cdot 9=7\cdot 9-4\cdot 9.$$

Για να πολαπλαςιάςυμε τι διαφορα διο αριθμον επι έναν οπιοδίποτε αριθμο, αρκι να πολαπλαςιάςυμε αφτον τον αριθμο χοριςτα επι το μιοτέο κε χοριςτα επι τον αφερετέο κε να αφερέςυμε απο το πρότο γινόμενο το δέφτερο.

Αφτο με γράματα γράφετε: $(a-b)\cdot c=ac-bc.$

4. $(6+8-9)\cdot 4=5\cdot 4=20,$

$$(6+8-9)\cdot 4=6\cdot 4+8\cdot 4-9\cdot 4=24+32-36=20.$$

§ 6. Πός αλάζι το γινόμενο όταν αλάζυν ι παράγοντες.

Για κςιλυργικες εργαςίες χριάζοντε 12 ςανίδια· τιν πρότι φορα δόςανε ςανίδια 4 **μ** × 25 **ςμ** × 3 **ςμ** κε τι δέφτερι φορα ςανίδια 4 **μ** × 25 **ςμ** × 6 **ςμ**. Πόςες φορες μεγάλοςε το ποςο τον ςανιδιον, πυ δοθίκανε τι δέφτερι φορα ςχετικα με τιν πρότι;

Λίςι. Ο όνκος τυ ενος ςανιδιυ απο τιν πρότι παρτίδα:

$$400\times 25\times 3=30\,000 \text{ κιβ. ςμ.}$$

Ο όνκος τυ ενος ςανιδιυ τις δέφτερις παρτίδας:

$$40\times 25\times 6=60\,000 \text{ κιβ. ςμ.}$$

Βλέπυμε, πος απο τιν άφκςιςι τυ ενος παράγοντα κατα 2 φορες αφκςίθικε κε το γινόμενο 2 φορες.

Αν εμις ςτι θέςι τυ όνκυ $400\times 25\times 6=60\,000$ **κιβ. ςμ** πάρυμε τον όνκο $400\times 25\times 3=30\,000$ **κιβ. ςμ** θα δύμε, πος απο τιν ελάτοςι ενος παράγοντα κατα 2 φορες, ελατόνετε όλο το γινόμενο 2 φορες.

I. Οςες φορες αφκςάνυμε ίτε ελατόνυμε έναν απ' τυς παράγοντες, τόςες φορες αφκςάνι, ίτε ελατόνετε κε το γινόμενο.

Αν αντις ςανίδια απο τιν πρότι παρτίδα πάρυμε δοκάρια κοντίτερα κατα διο φορες κε χοντρότερα κατα διο φορες, τότε ο όνκος τυ δοκαριυ θα ιςύτε με τον όνκο τυ ςανιδιυ.

Κε τότε ςτι θέςι τον $400\times 25\times 3=30\,000$ **κιβ. ςμ** θα ίχαμε όνκο: $200\times 25\times 6=30\,000$ **κιβ. ςμ.**

II. Αν αφκςίςυμε τον ένα παράγοντα κάμποςες φορες κε ελατόςυμε τον άλο τόςες επίςις φορες, το γινόμενο δεν αλάζι.

§ 7. Πολαπλαςιαζμος επι αριθμο με ένα ςιμαντικο πςιφίο.

1. Τον πολαπλαςιαζμο μονοπςίφιον αριθμον τον κάνυν ςίμφονα με τον πίνακα τυ πολαπλαςιαζμυ.

2. Ας δίχςυμε, πός γίνετε ο πολαπλαςιαζμος επι αριθμο, πυ έχι μονάδα κε μιδενικα.

Παράδιγμα. Τεχνικι ατμόςφερα ονομάζετε ι πίεςι πυ εκςαςκι 1 **κγ** πάνο ςε τετραγονικο ςαντίμετρο. Ι πίεςι μέςα ςτο καζάνι ιςύτε με 35 ατμόςφερες. Πόςα χιλιόγραμα αποτελι ι πίεςι αφτι ςε κάθε τετραγονικο μέτρο;

Οπος φένετε, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε 35 επι 10 000. Για να βρύμε το γινόμενο ας πολαπλαςίαςυμε πρότα τον 35 επι 10. Αφτο ςιμένι πος κάθε μονάδα τυ αριθμύ-μας θα επαναλιφθι 10 φορες κε θα γίνι δεκάδα, κάθε δεκάδα θα γίνι εκατοντάδα κε θα έχυμε 35 δεκάδες, ι οπίες ιςύντε με 350.

Απο τιν εκςοτερικι μορφί-τυ το γινόμενο διακρίνετε απο τον πολαπλαςιαςτέο, μονάχα πυ έχι ένα παραπανίςιο μιδενικο ςτο τέλος. Ινε εφκολο να δύμε πος κατο τον πολαπλαςιαζμο επι 100 πρέπι, για να βρύμε το γινόμενο, να γράπςυμε ςτο τέλος τυ πολαπλαςια-

στέυ διο μιδενικα, κατα τον παλαπλαςιαζμο επι 1000 να γράπςυμε τρία μιδενικα, κ.υ.κ.

Στο παράδιγμά-μας θἄχυμε: $35 \cdot 10\,000 = 350\,000$ **χγ** ςε **1 τετρ. μ.**

Για να πολαπλαςιάςυμε ακέρεο αρθμο επι 10, 100, 1000, αρκι να γράπςυμε ςτο τέλος τυ πολαπλαςιαςτέυ προς τα δεκςια τόςα μιδενικα όςα έχι ο πολαπλαςιαςτις.

Τον πολαπλαςιαζμο πολιπςίφιυ αριθμυ επι μονοπςίφιο τον χάνυμε ος εχςις:

$$\begin{aligned} 2437 \cdot 6 &= (2000 + 400 + 30 + 7) \cdot 6 = \\ &= 2000 \cdot 6 + 400 \cdot 6 + 30 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = \\ &= 12\,000 + 2400 + 180 + 42 = 14\,622. \end{aligned}$$

Εδο αντικαταςτένυμε τον πολαπλαςιαςτέο με άθριζμα προςθετέον κε βρίςκυμε το γινόμενο τυ αθρίζματος επι τον πολαπλαςιαςτι.

Τον πολαπλαςιαζμο τον αρχίζυνε απο τις κατότερες τάκςις κε γράφυνε έτςι:

$$\begin{array}{r} 2437 \\ \times\ 6 \\ \hline 14\,622 \end{array}$$

Πρότα πολαπλαςιάζυμε 7 επι 6· βρίςκυμε 42 μονάδες· γράφυμε το πςιφίο 2 κε κρατύμε τις 4 δεκάδες για να τις προςθέςυμε κατόπι ςτο γινόμενο τον δεκάδον. Πολαπλαςιάζυμε τις 3 δεκάδες επι 6, βρίςκυμε 18. Προςθέτυμε τις 4 δεκάδες, βρίςκυμε 22 δεκάδες. Το πςιφίο 2 γράφυμε ςτι θέςι τον δεκάδον, κε κρατύμε τις 2 εκατοντάδες. Πολαπλαςιάζυμε τις 4 εκατοντάδες επι 6. Βρίςκυμε 24. Προςθέτυμε τις 2 κρατύμενες εκατοντάδες· βρίςκυμε 26 εκατοντάδες· τις 6 εκατοντάδες τις γράφυμε ςτι θέςι τον εκατοντάδον κε κρατύμε τις διο χιλιάδες. Πολαπλαςιάζυμε τις 2 χιλιάδες επι 6 κε ςτο γινόμενο προςθέτυμε τις κρατύμενες 2 χιλιάδες. Βρίςκυμε 14 χιλιάδες. Τις γράφυμε ςτι θέςι τον χιλιάδον. Βρίςκυμε 14 622.

§ 8. Πολαπλαςιαζμος αριθμον, πυ τελιόνυν ςε μιδενικα.

1. Να βρέθι το γινόμενο 353 · 800.

Γράφυμε:

$$\begin{aligned} 353 \cdot 800 &= 353 \cdot (8 \cdot 100) = 353 \cdot 8 \cdot 100 = \\ &= (353 \cdot 8) \cdot 100 = 2824 \cdot 100 = 282\,400. \end{aligned}$$

Κατα τι γραφι ο αριθμος 800 ίνε ςαν γινόμενο διο παραγόντον. Για να πολαπλαςιάςυμε επι γινόμενο $8 \cdot 100$ μπορύμε πρότα να πολαπλαςιάςυμε επι 8 κε έπιτα επι 100.

2. Να πολαπλαςιαςθυν: 1900 · 7000.

Λ ί ς ι. $1900 \cdot 7000 = (19 \cdot 100) \cdot (7 \cdot 1000) =$
$= 19 \cdot 100 \cdot 7 \cdot 1000 = (19 \cdot 7) \cdot (100 \cdot 1000) =$
$= 133 \cdot 100\,000 = 13\,300\,000.$

§ 9. πολαπλαςιαζμος πολιπςίφιον αριθμον.

1. Να πολαπλαςιαςθυν 718 · 243.

Λ ί ς ι. Βαςιζόμενι ςτον επιμεριςτικο νόμο γράφυμε τιν πράκςι αφτι ος εχςις:

$$\begin{aligned} 718 \cdot 243 &= 243 \cdot 718 = (200 + 40 + 3) \cdot \\ \cdot 718 &= 718 \cdot 200 + 718 \cdot 40 + 718 \cdot 3 = \\ &= 143\,600 + 28\,720 + 2\,154 = 174\,474. \end{aligned}$$

Για ςιντόμεφςι γράφυν τυς αριθμυς ςε ςτίλες:

$$\begin{array}{r} 718 \\ \times\ 243 \\ \hline 2154 \\ 28\,720 \\ 143\,600 \\ \hline 174\,474 \end{array}$$

Το 2154 ίνε γινόμενο τυ αριθμυ 718 επι 3· το 28 720 ίνε γινόμενο τυ 718 επι 40· το γινόμενο 143 600 ίνε γινόμενο τυ 718 επι 200. Αφτα ονομάζοντε μερικα γινόμενα. Το δέφτερο μερικο γινόμενο ίνε γινόμενο τυ 718 επι τις δ ε κ ά δ ε ς.

Το μερικο αφτο γινομενο πάντα τελιόνι ςε μιδενικο, γι' αφτο δεν γράφυνε το 0, αλα γράφυν το μερικο γινόμενο έτςι, όςτε το τελεφτέο ςιμαντικο πςιφίο να βρεθι κάτο απ' τις δεκάδες. Γραφτι διατίποςι:

$$\begin{array}{r} 718 \\ \times\ 243 \\ \hline 2154 \\ 2872 \\ 1436 \\ \hline 174\,474 \end{array}$$

Πολαπλαςιάζοντας επι τις εκατοντάδες βρίςκυμε 718 · 200. Ο αριθμος 1436 θα ίνε ο αριθμος τον εκατοντάδον, γι' αφτο τον γράφυμε έτςι, όςτε το τελεφτέο ςιμαντικο πςιφίο-τυ να βρεθι κάτο απ' τις εκατοντάδες.

Τα μιδενικα ςτο τέλος τον μερικον γινομένον δεν γράφοντε.

2. Να πολαπλαςιαςθυν: 307 · 428.

Λ ί ς ι. Επιδι ςτον πρότο αριθμο ίνε λιγότερα ςιμαντικα πςιφία, γι' αφτο τον γράφυμε ος πολαπλαςιαςτι. Ο πολαπλαςιαςτις δεν έχι δεκάδες, γι' αφτο κε λίπι το δέφτερο μερικο γινόμενο. Το ακόλυθο μερικο γινόμενο το γράφυν κατα διο τάκςις αριςτερα.

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times\ 307 \\ \hline 2996 \\ 1284 \\ \hline 131\,396 \end{array}$$

Για να πολαπλαςιάςυμε πολιπςίφιο αριθμο επι πολιπςίφιο, πρέπι τον πολαπλαςιαςτέο να τον πολαπλαςιάςυμε χοριςτα επι τις μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες τυ πολαπλαςιαςτι κε να προςθέςυμε τα γινόμενα, πυ βρίκαμε.

3. Να βρεθι το γινόμενο 18 · 2756.

Λ ί ς ι. Πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το 18 επι τον 2756. Κςέροντας όμος πος το γινόμενο δεν αλάζι απο τιν μετάθεςι τον παραγόντον, πολαπλαςιάζυμε τον 2756 επι 18. Αφτο ίνε καταλιλότερο.

$$2756 \cdot 18 = 49\,608$$

Αν ι παράγοντες δεν έχυν τον ίδιο αριθμο ςιμαντικον πςιφίον, τότε ίνε καταλιλότερο να πάρυμε για πολαπλαςιαςτι εκίνον τον αριθμο, πυ έχι λιγότερα ςιμαντικα πςιφία.

§ 10. Ενια τις δίναμις τυ αριθμυ.

Οταν έχυμε να πολαπλαςιάςυμε ίςυς παράγοντες μπορύμε να απλοπιίςυμε τι γραφι.

1. Εχυμε τα γινόμενα:

1) $3 \cdot 3$, 2) $2 \cdot 2 \cdot 2$, 3) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 4) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, 5) $10 \cdot 10 \cdot 10$.

Για τέτια γινόμενα ιπάρχι ιδιετέρος τρόπος γαφις:

1) $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$, 2) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, 3) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$, 4) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$, 5) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$.

Ο πολαπλαςιαζμος ίςον παραγόντον ίνε νέα (πέμτι) πράκςι— ί π ς ο ς ι ς τ ι δ ί ν α μ ι. Το παράδιγμα 3^2, πυ φέραμε, διαβάζετε έτςι: το τρία να ιπςοθι ςτι δέφτερι δίναμι, ίτε να βρεθι το γινόμενο διο παραγόντον, καθένας απο τυς οπίυς ιςύτε με τον 3. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, διαβάζετε έτςι: τον αριθμο 2 να τον ιπςόςυμε ςτιν τρίτι δίναμι, ίτε να βρύμε το γινόμενο τριον παραγόντον, πυ καθένας-τυς ιςύτε με 2.

2. Αν θα κάνυμε τις πράκςις: 2^5, 3^4, 4^3, 7^3 πρέπι να βρύμε 32, 81, 64, 343.

Στιν παράςταςι $2^5 = 32$, ο αριθμος 2 ονομάζετε β ά ς ι τις δίναμις, ο αριθμος 5 — ε κ θ έ τ ι ς τις δινάμις.

Ο ρ ι ζ μ ι. I. Βάςι τις δίναμις ονομάζετε εκίνος ο αριθμος, τον οπίον πρέπι να ιπςόςυμε ςτι δίναμι.

II. Ο αριθμος, πυ δίχνι πόςες φορες πρέπι να παρθι ι βάςι ος παράγοντας, ονομάζετε εκθέτις τις δίναμις.

Σιχνα, για να απλυςτέβυν τι γραφι τυ αριθμυ με μιδενικα

ςτο τέλος, γράφυν αφτον τον αριθμο με τι βοίθια τυ εκθέτι τις δίναμις ςτον αριθμο 10:

1) $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$

2) $5000 = 5 \cdot 1000 = 5 \cdot 10^3$, 3) $4\,000\,000 = 4 \cdot 10^6$.

§ 11. Διέρεςι.

Δ ι έ ρ ε ς ι ο ν ο μ ά ζ ε τ ε π ρ ά κ ς ι α ν τ ί ς τ ρ ο φ ι μ ε τ ο ν π ο λ α π λ α ς ι α ζ μ ο.

1. Ενα χολχόζι έςπιρε 800 **εχτ.** χοχινογύλι κε πίρε ςοδια 425 **τς** απ' το κάθε εχτάρι. Πόςο χοχινογύλι πίρε το χολχόζι;

Λ ί ς ι. $425 \cdot 800 = 340\,000$ **τς.**

Το πρόβλιμα αφτο λίνετε με τον πολαπλαςιαζμο.

Ας λίςυμε αντίθετο πρόβλιμα.

2. Ενα χολχόζι έςπιρε 800 **εχτ.** χοχινογύλι κε πίρε ςοδια 340 000 **τς.** Πόςι ίταν ι μέςι ςοδια τυ ενος εχταριυ ςτο χολχόζι;

Λ ί ς ι. $340\,000 : 800 = 425$ τς.

Στο αντίθετο αφτο πρόβλιμα βρίςκυμε ένα άγνοςτο παράγοντα (425) απ' το γνοςτο γινόμενο διο παραγόντον (340 000) κε απ' το γνοςτο δέφτερο παράγοντα (800).

Για τι λίςι τυ δέφτερυ προβλίματος κάνυμε διέρεςι.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Διέρεςι λέγετε ι πράκςι, με τιν οπία βρίςκετε ένας απο τυς παράγοντες, όταν ίνε γνοςτο το γινόμενο κε ο δέφτερος παράγοντας.

Ι δομένι αριθμι κε κίνι, πυ έχυν προκίπςι απο τιν διέρεςι, έχυν δικές-τυς ιδιέτερες ονομαςίες:

1) το δομένο γινόμενο δίο παραγόντον ονομάζετε **διερετέος,**

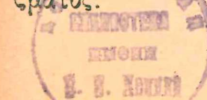
2) ο δομένος παράγοντας ονομάζετε **διερέτις,**

3) ο ζιτύμενος παράγοντας ονομάζετε **πιλίκο.**

Για να βρύμε το πιλίκο, διερύμε το διερετέο δια τυ διερέτι.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Διερετέος ονομάζετε εκίνος ο αριθμος, τον οπίο διερυν. Διερέτις ονομάζετε εκίνος ο αριθμος, με τον οπίον διερυν. Πιλίκο ονομάζετε εκίνος ο αριθμος, πυ προκίπτι ος εκςαγόμενο τις διέρεςις.

Το ςιμίο τις διέρεςις ίνε (:) διο τελίες ίτε ι γραμι τυ κλάςματος.



3. Παραδιγμα. Το 12 να διερεθι δια 4. Το γράφυμε έτςι:

$$12 : 4 = 3, \text{ ίτε } \frac{12}{4} = 3.$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$(\text{διερετέος}) : (\text{διερέτις}) = (\text{πιλίκο}) \qquad \frac{\text{διερετέος}}{\text{διερέτις}} = \text{πιλίκο}.$$

Αν παραςτίςυμε το διερετέο με το γράμα a, τον διερέτι με το γράμα b, το πιλίκο—με το γράμα q, τότε μπορύμε ςιμβολικα να γράπςυμε τι διέρεςι με τα γράματα:

$$a : b = q, \text{ ίτε } \frac{a}{b} = q,$$

όπυ κε το αριςτερο μέρος ($a : b$) κε το δεκςιο (q) τα ονομάζυν πιλίκο.

§ 12. Ο πολαπλαςιαζμος κε ι διέρεςι ίνε αμιβέα αντίςτροφες πράκςις.

Απο τον οριζμο τις διέρεςις φένετε, πος ι διέρεςι τον αριθμον έχι ςχέςι με τον πολαπλαςιαζμο. Γι' αφτο κατα τιν διέρεςι διπςίφιον κε μονοπςίφιον αριθμον δια μινοπςίφιον, χριςιμοπιύνε τον πίνακα τυ πολαπλαςιαζμυ.

1. Να διερεθι ο 36 δια τυ 9.

Λ ί ς ι : $36 : 9 = 4$, επιδι απο τον πίνακα τυ πολαπλαςιαζμυ κςέρυμε, πος $4 \cdot 9 = 36$.

Ι διέρεςι κε ο πολαπλαςιαζμος ίνε πράκςις αμιβέα αντίςτροφες.

2. Μια κοπερατίβα κυβάλιςε ςτο ςταθμο διο παρτίδες εμπόρεβμα κάθε μια απο 160 κιβότια. Το εμπόρεβμα αφτο το φόρτοςαν εκςίςυ ςε διο βαγόνια. Πόςα κιβότια φορτόςανε ςτο κάθε βαγόνι;

Λ ί ς ι . $160 \cdot 2 = 320$ κιβότια, $320 : 2 = 160$ κιβότια.

Με τις παρενθέςις μπορύμε να γράπςυμε τι λίςι έτςι:

$$(160 \cdot 2) : 2 = 160 \text{ κιβότια.}$$

Μπορύμε ακόμι να χριςιμοπιίςυμε κε το άλο ςιμίο τις διέρεςις,

$$\frac{160 \cdot 2}{2} = 160 \text{ κιβότια.}$$

Ο αριθμος 160 δεν άλακςε, όταν κάναμε μ' αφτον δίο αμι-

βέα αντίςτροφες πράκςις—ςτιν αρχι πολαπλαςιάςαμε επι 2, κε κατόπι το γινόμενο, πυ βρίκαμε, το διερέςαμε δια 2.

Απο τον πολαπλαςιαζμο κε τιν διέρεςι, πυ κάναμε διαδοχικα με το 2, δεν άλακςε ι αρχικι ακςία τυ αριθμυ, γι' αφτο κε ςτο εκςαγόμενο ίχαμε 160, ανεκςάρτιτα απο το αν πρότα, ίτε ίςτερα τον πολαπλαςιάζυμε, ίτε τον διερύμε με 2, ίτε κε αντίςτροφα.

Αν τον δομένο αριθμο τον πολαπλαςιάςυμε επι άλον οπιονδίποτε κε ίςτερα το γινόμενο, πυ βρίςκυμε το διερέςυμε δια τυ ίδιυ αριθμυ, τότε προκίπτι ςτο αποτέλεζμα, ο ίδιος αριθμος.

Ας γράπςυμε τιν ιδιότιτα αφτι με πςιφία κε γράματα:

$$1)\ \frac{15 \cdot 7}{7} = 15 \qquad 2)\ \frac{a \cdot b}{b} = a.$$

§ 13. Πράκςις διαφόρον βαθμίδον.

Ι τέςερις κιριότερες αριθμιτικες πράκςις ίνε ανα δίο αντίςτροφες ι μια προς τιν άλι: ι αφέρεςι αντίςτροφι με τιν πρόςθεςι, ι διέρεςι — με τον πολαπλαςιαζμο.

Εχτος απ' το κςεχόριζμα τον πράκςεον ςε αμιβέα αντίςτροφες, διακρίνοντε ακόμα κε πράκςις διαφόρον βαθμίδον:

I βαθμίδα — πρόςθεςι κε αφέρεςι·
II βαθμίδα — πολαπλαςιαζμος κε διέρεςι.
III βαθμίδα — ίπςοςι ςτιν δίναμι.

Στιν απλύςτερι μορφί-τις ι πράκςι τις ανότερις βαθμίδας ίνε απλύςτεπςι τις πράκςις τις προιγύμενις κατότερις βαθμίδας. Ετςι τον πολαπλαςιαζμο $3 \cdot 5 = 15$ μπορύμε να τον γράπςυμε πιο εκτεταμένα με τιν πρόςθεςι:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15.$$

Μπορύμε επίςις να μάθυμε, πόςες φορες ο 5 χορι ςτον 15, διλαδι $15 : 5 = 3$, με τιν αφέρεςι $15 - 5 - 5 - 5 = 0$, διλ. να αφερέςυμε 3 φορες απο 5.

Μ' άλα λόγια, πολαπλαςιαζμος επι ακέρεο αριθμο, ίνε πρόςθεςι ίςον προςθετέον κε ι διέρεςι δια ακέρευ αριθμυ, ίνε διαδοχικι αφέρεςι ενος κε τυ ίδιυ αριθμυ. Τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι μπορύμε να αντικαταςτίςυμε με τιν πρόςθεςι κε τιν αφέρεςι. Τιν

πρόςθεςι κε αφέρεςι τις ονομάζυν π ρ ά κ ς ι ς π ρ ό τ ι ς β α θ μ ί δ α ς, ενο τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι — π ρ ά κ ς ι ς δ έ φ τ ε ρ ι ς β α θ μ ί δ α ς.

Με παρόμιο τρόπο αντικαταςτένυν τιν εχτεταμένι γραφι τυ πολαπλαςιαζμυ ίςον παραγόντον με πιο ςίντομι γραφι τις πράκςις ί π ς ο ς ι ς ς ε δ ί ν α μ ι. Ι ίπςοςι ςε δίναμι ς' αφτιν τιν περίπτοςι ίνε απλύςτεπςι τυ πολαπλαςιαζμυ:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Ο πολαπλαςιαζμος ίνε πράκςι δ έ φ τ ε ρ ι ς β α θ μ ί δ α ς κε ι ίπςοςι ςε δίναμι — πράκςι τ ρ ί τ ι ς β α θ μ ί δ α ς.

§ 14. Προβλίματα, πυ λίνοντε με διέρεςι.

Κςέρυμε, πος ι διέρεςι ίνε πράκςι αντίςτροφι με τον πολαπλαςιαζμο. Γι' αφτο το κιριότερο πρόβλιμα απο κίνα πυ λίνυν με τι διέρεςι, ίνε ι έβρεςι τυ άγνοςτυ παράγοντος, όταν ίνε γνοςτο το γινόμενο κε ένας απ' τυς παράγοντες.

1. Το γινόμενο ίνε 645, ο ένας απ' τυς παράγοντες 15, να βρεθι ο άλος παράγοντας.

Λ ί ς ι. $\frac{645}{15} = 43.$

Το πρόβλιμα λίθικε με τι διέρεςι.

2. Το Σεπτέβρι τυ 1929 ςτιν Αμερικι λιόςανε 3561 χιλ. **τ** μαντέμι· μετα δίο χρόνια, το Σεπτέβρι τυ 1931, έχι λιγοςτέπςι το λιόςιμό-τυ κατα 3 φορες. Πόςι τόνι μαντεμιυ λιόθικαν το Σεπτέβρι τυ 1931 ςτιν Αμερικι;

Λ ί ς ι. Για να λίςυμε το πρόβλιμα πρέπι να λιγοςτέπςυμε 3 φορες τον αριθμο 3561:

$$3561 : 3 = 1187 \text{ χιλ. } \mathbf{τ}.$$

Αφτο ίνε δέφτερος τίπος προβλιμάτον, πυ λίνετε με τι διέρεςι.

3. Ενα κολχόζι πρέπι να πλιρόςι 4525 εργατοιμέρες, γι' αφτο ορίςανε 36 200 **χγ** ςιτάρι. Πόςο θα πλιροθι ι εργατοιμέρα;

Λ ί ς ι: Επιδι κάθε μια εργατοιμέρα πλιρόνετε εκςίςυ, γι' αφτο για να λίςυμε το πρόβλιμα χριάζετε να διερέςυμε το 36 200 ςε 4525 ίςα μέρι:

$$36\,200 : 4525 = 8 \text{ χγ}.$$

Κε αφτο το πρόβλιμα λίνετε επίςις με διέρεςι.

4. Σε κάθε αφτοκίνιτο μπορύνε να καθίςυνε 25 άνθροπι. Πόςα τέτια αφτοκίνιτα χριάζοντε για 300 ανθρόπυς;

Εδο πρέπι να βρύμε πόςες φορες ο αριθμος 25 χοράι ςτον αριθμο 300. Αφτο το βρίςκυν με τι διέρεςι.

Λ ί ς ι: 300 : 25 = 12 αφτοκίνιτα.

5. Διο ομάδες εργατον κςεφορτόνυν τύβλα. Ι μια ομάδα κατα τιν εργαςία-τις κάνι 24 τύβλα ςκάρτα ςτι χιλιάδα, ι άλι 12 κομάτια. Πιά ομάδα κάνι περιςότερα τύβλα ςκάρτα κε πόςες φορες;

Λ ί ς ι. Για να λίςυμε το πρόβλιμα αφτο, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμο 24 δια τυ 12, θα έχυμε 24 : 12 = 2, διλ. ι πρότι ομάδα κάνι διο φορες περιςότερο ςκάρτα, ίτε ι δέφτερι ομάδα διο φορες λιγότερο.

Στο πρόβλιμα αφτο ςινκρίνοντε διο αριθμι μέςον τις διέρεςις. Ετςι λιπον:

Με τι διερέςι λίνοντε προβλίματα όταν πρέπι:

1) Να βρεθι ο άγνοςτος παράγοντας, κςέροντας το γινόμενο κε τον ένα παράγοντα.

2) Να ελατοθι ο αριθμος κάμποςες φορες.

3) Να διερεθι ο αριθμος ςε ίςα μέρι.

4) Να ςινκριθυν διο αριθμι μετακςί-τυς: να βρεθι πόςες φορες ο ένας αριθμος χορις τον άλο (πόςες φορες ο ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος, ίτε μικρτόερος απ' τον άλο).

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι Ι. Τα προβλίματα τις διέρεςις δεν ίνε δινατον να λιθυν πάντα, έτςι πυ το εκςαγόμενο νάνε ακέρεος αριθμος.

6. Να ελατοθι ο αριθμος 15 κατα 7 φορες. Ι λίςι τυ προβλίματος δεν μπορι να παραςταθι με ακέρεο αριθμο.

Το 15 επίςις δεν μπορι να διερεθι ςε 7 ίςα μέρι, πυ να παραςτένυν ακέρεο αριθμο, ίτε παραβάλοντας το 15 κε 7 μέςον τις διέρεςις να παραςτίςυμε το εκςαγόμενο τις ςίνκριςις με ακέρεο αριθμο.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι ΙΙ. Με τιν πρόςθεςι κε τον πολαπλαςιαζμο επι ακέρεο, εμις αφκςένυμε τον αριθμο. Ι αφέρεςι κε ι διέρεςι δια ακέρευ χριςιμέβυν για να ελατόςυμε τον αριθμο. Οςτόςο ιπάρχι διαφορα ςτο χαρακτίρα τις άφκςιςις κε τις ελάτοςις αφτις, ςτιν οπία πρέπι να δόςυμε ιδιέτερι προςοχι.

Με τιν πρόςθεςι αφκςάνυν τον αριθμο κατα κ ά μ π ο ς ε ς μ ο ν ά δ ε ς,

Ο πολαπλαςιαζμος επι αριθμο μεγαλίτερο τις μονάδας επιτρέπι να αφκςίςυμε τον αριθμο κ ά μ π ο ς ε ς φ ο ρ ε ς.

Ι αφέρεςι επιτρέπι να ελατόςυμε τον αριθμο κ α τ α κ ά μ π ο ς ε ς μ ο ν ά δ ε ς.

Ι διέρεςι δι' αριθμυ μεγαλίτερυ τις μονάδας, επιτρέπι να ελατόςυμε τον αριθμο κ ά μ π ο ς ε ς φ ο ρ ε ς.

§15. Ι εκςάρτιςι μεταξςι τον δομένον κε εκςαγομένον κατα τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι.

1. Ενα εργοςτάςιο ανταλαχτικον για τράχτορα, μπορι να βγάλι τιν ιμέρα κατα μέςον όρο προιόντα αχςίας 11 200 ρύβ. Πόςι ίνε ι αχςία τον ανταλαχτικον για 15 μέρες;

Λ ί ς ι. 11 200 · 15 = 168 000 ρύβλια.

Ας χάνυμε αντίθετο πρόβλιμα.

2. Μέςα ςε 15 ιμέρες το εργοςτάςιο έβγαλε ανταλαχτικα για τράχτορα αχςίας 168 000 ρυβλίον. Πρέπι να βρεθι πάνο ςτι βάςι αφτον τον δομένον ι αχςία τον ανταλαχτικον ςε μια μέρα.

Λ ί ς ι. 168 000 : 15 = 11200 ρύβλια.

Εχςετάζοντας τι λίςι αφτον τον διο προβλιμάτον, βλέπυμε, πος χςέροντας το γινόμενο 168 000 ρύβλια κε έναν απ' τυς παράγοντες, τον 15, μπορύμε να βρύμε τον άλο παράγοντα ςίμφονα με τον ακόλυθο κανόνα:

Ι. Ενας απο τυς διο παράγοντες ιςύτε με το γινόμενο, διερεμένο με τον δέφτερο παράγοντα.

Ας γράπςυμε το ςιμπέραζμα αφτο με γράματα:

Αν $a \cdot b = q$ (I), τότε $a = \frac{q}{b}$ (II), ìτε $b = \frac{q}{a}$ (III).

Ι πρότι ιςότιτα (1) δίχνι πος ο διερετέος q ιςύτε με το γινόμενο τυ διερέτι επι το πιλίκο (a κε b).

Ας δοκιμάςυμε ςτο ακόλυθο παράδιγμα τιν αλίθια τις εχςάρτιςις αφτις.

3. Πρέπι να διερέςυμε κε να κάνυμε δοκιμι τις διέρεςις: $\frac{360}{24}$.

Λ ί ς ι. $\frac{360}{24} = 15$.

Δ ο κ ι μ ι. Το 360 πρέπι να ιςύτε με το 24 · 15, όπυ το 360 ίνε ο διερετέος, το 24 ο διερέτις, κε το 15 το πιλίκο. Κε πραγματικα:

$$360 = 24 \cdot 15.$$

ΙΙ. Ο διερετέος ιςύτε με το διερέτι πολαπλαςιαζμένο επι το πιλίκο.

Μπορύμε τι δοκιμι να τιν κάνυμε αλιότικα, με τι διέρεςι:

$$360 : 15 = 24.$$

Διερόντας το διερετέο δια τυ πιλίκυ, βρίςκυν το διερέτι.

ΙΙΙ. Ο διερέτις ιςύτε με το διερετέο, διερεμένο δια τυ πιλίκυ.

Τα ςιμπεράςματα, πυ κάναμε, μας επιτρέπυν να βρίςκυμε τον άγνοςτο παράγοντα, τον άγνοςτο διερετέο ίτε το διερέτι.

Στα παρακάτο παραδίγματα πρέπι να βρεθι ο άγνοςτος αριθμος, πυ ςιμιόνετε με το γράμα x.

1. $40x = 280$.

Λ ί ς ι. Στο παράδιγμα αφτο ίνε άγνοςτος ένας παράγοντας. Γνοςτι ίνε το γινόμενο κε ο άλος παράγοντας.

Σίμφονα με τον πρότο κανόνα:

$$x = \frac{280}{40} = 7.$$

2. $x \cdot 70 = 350$.

Λ ί ς ι. Το παράδιγμα αφτο διαφέρι απο το προιγύμενο κατα τύτο, ότι ο άγνοςτος παράγοντας ςτέκετε ςτιν πρότι θέςι. Ι λίςι ίνε ι ίδια:

$$x = \frac{350}{70} = 5.$$

3. $\frac{x}{16} = 12$, ίτε $x : 16 = 12$.

Λ ί ς ι. Το παράδιγμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε, εποφελύμενι τι δέφτερι ιδιότιτα: x — διερετέος, 16 — διερέτις, 12 — πιλίκο.

$$x = 12 \cdot 16 = 192.$$

4. $187 : x = 11$, ίτε $\frac{187}{x} = 11$.

Λ ί ς ι. Στο παράδιγμα αφτο ίνε γνοστι ο διερετέος κε το πιλίκο, κε πρέπι να βρεθι ο διερέτις.

Ι τρίτι ιδιότιτα δίνι τιν ακόλουθι λίςι:

$$\frac{187}{11}=x, \quad x=17.$$

Μπορύμε στο παράδιγμα αφτο να δόςυμε άλι εκςίγιςι, πέρνοντας τον x κε τον 11 ςαν παράγοντες, κε το 187 ςαν γινόμενό-τυς. Ι μετάθεςι τον παραγόντον δεν αλάζι το μέγεθος τυ γινομένυ καθος κε το μέγεθος τον παραγόντον.

$11 \cdot x = 187$· μπορύμε να βρύμε τον άγνοςτο παράγοντα:

$$x=\frac{187}{11}=17.$$

§ 16. Δοκιμι τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις διέρεςις.

Ι κανόνες τις προιγύμενις παράγραφυ δίνυν απλυς τρόπυς δοκιμις τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις διέρεςις:

1. Πρέπι να γίνι ι δοκιμι τυ πολαπλαςιαζμυ:

$$406 \cdot 78 = 31\,668.$$

Δ ο κ ι μ ι: $31\,668 : 406 = 78.$

Ι. Για να κάνυμε τι δοκιμι τυ πολαπλαςιαζμυ μπορύμε να διερέςυμε το γινόμενο με έναν απ' τυς παράγοντες κε το εκςαγόμενο πρέπι να δόςι το δέφτερο παράγοντα.

2. Να γίνι ι δοκιμι τις διέρεςις: $16\,050 : 642 = 25.$

Δ ο κ ι μ ι. 1) $642 \cdot 25 = 16\,050$, ίτε 2) $16\,050 : 25 = 642.$

ΙΙ. Για να κάνυμε τι δοκιμι τις διέρεςις (χορις κατάλιπο) μπορύμε:

1) να πολαπλαςιάςυμε το πιλίκο επι τον διερέτι, κε το εβριςκόμενο πρέπι να δόςι το διερετέο.

2) Να διερέςυμε τον διερετέο δια τυ πιλίκυ κε το εβριςκόμενο πρέπι να δόςι τον διερέτι.

§ 17. Ι αλαγι τυ πιλίκυ.

1. Πόςα ανιχτα βαγόνια χριάζοντε για τι μεταφορα 16 χιλ. **τ** μαντεμιυ αν κάθε ανιχτο βαγόνι πέρνι 16 **τ**;

Λ ί ς ι. $16\,000 : 16 = 1000$ αν. βαγόνια.

2. Πόςα ανιχτα βαγόνια τις ίδιας χοριτικότιτας χριάζοντε για τι μεταφορα 48 χιλ. **τ.** μαντεμιυ;

Λ ί ς ι. $48\,000 : 16 = 3000$ αν. βαγόνια.

Σινκρίνοντας τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ με τι λίςι τυ πρότυ, βλέπυμε, πος αφκςένοντας το φορτίο 3 φορες, αφκςένι κε ο αριθμος τον βαγονιον επίςις 3 φορες. Ο διερετέος κε το πιλίκο άλαχςαν: κε ι διό-τυς αφκςίθικαν 3 φορες.

Ι. Οςες φορες αφκςένυμε, ίτε ελατόνυμε το διερετέο, τόςες φορες αφκςένι ίτε ελατόνετε κε το πιλίκο.

Ο κανόνας τις ελάτοςις θα ίνε αντιλιπτος, αν αλάκςυμε τι θέςι τον προβλιμάτον 1 κε 2 κε αν ςινκρίνυμε τις λίςις-τυς.

3. Πόςα μεγάλα ανιχτα βαγόνια πρέπι νάχυμε για να μεταφέρυμε 48 χιλ. **τ.** μαντεμιυ αν ςε καθένα βαγόνι χορυν 48 **τ**;

Λ ί ς ι: $48\,000 : 48 = 1\,000$ αν. βαγόνια. Ας ςινκρίνυμε το πρόβλιμα τύτο με το πρόβλιμα 2. Στιν περίπτοςι αφτι το βάρος τυ φορτίυ κάθε βαγονιυ έχι αφκςιθι 3 φορες, κε ο αριθμος τον βαγονιον λιγόστεψε 3 φορες.

Αλαχςε ο διερέτις γι' αφτο άλαχςε κε το πιλίκο.

ΙΙ. Αν αφκςίςυμε το διερέτι κάμποςες φορες, τότε τόςες φορες ελατόνετε κε το πιλίκο. Αν ελατόςυμε το διερέτι κάμποςες φορες, τότε τόςες φορες αφκςένι το πιλίκο.

4. Πόςα βαγόνια χριάζοντε για τι μεταφορα 144 χιλ. **τ.** φορτίυ, αν στο καθένα χορυν 48 **τ**;

Λ ί ς ι. $144\,000 : 48 = 3000$ αν. βαγόνια.

Σινκρίνοντας τα προβλίματα 4 κε 2, βλέπυμε, πος ι άφκςιςι τυ διερετέυ 3 φορες άφκςιςε κε το πιλίκο 3 φορες, κε ςινάμα χάρις στιν άφκςιςι τυ διερέτι τρις φορες, το πιλίκο ελατόθικε 3 φορες κε στο τέλος, έμινε το ίδιο.

III. Αν αφκςίςυμε ίτε ελατόςυμε το διερετέο κε το διερέτι με τον ίδιο αριθμο, τότε το πιλίκο δεν αλάζι.

Τον ίδιο κανόνα μπορύμε να διατιπόςυμε κι αλιότικα.

1. Αν πολαπλαςιάςυμε το διερετέο κε το διερέτι με ένα κε τον ίδιο αριθμο, το πιλίκο δεν αλάζι.

2. Αν διερέςυμε το διερετέο κε τον διερέτι με ένα κε τον ίδιο αριθμο το πιλίκο δεν αλάζι.

§ 18. Διέρεςι τυ γινομένυ κε τυ αθρίζματος.

Διέρεςι τυ γινομένυ. 1. Να μιραςθυν ςε διο ίςα μέρι 10 λ βενζίνας κε να βρεθι το βάρος κάθε μιςυ. 1 λ βενζίνα ζιγίζι 700 γ.

Λίςι. Μπορύμε να λίςυμε το πρόβλιμα: με διο τρόπυς.

1-ι λίςι. Βρίςκυμε το βάρος όλις τις βενζίνας κε κατόπι το βάρος τυ μιςυ ποςυ.

$$700\cdot 10 = 7000 \text{ γ.},\quad 7000:2 = 3500 \text{ γ.}$$

2-ι λίςι. Διερύμε το ποςο τις βενζίνας ςε διο ίςα μέρι κε βρίςκομε το βάρος κάθε μιςυ μέρυς.

$$700\cdot(10:2) = 700\cdot 5 = 3500 \text{ γ.}$$

Το εκςαγόμενο ίνε το ίδιο κε ςτιν πρότι κε ςτιν δέφτερι περίπτοςι:

$$(700\cdot 10):2 = 700\cdot(10:2) = 3500.$$

Στιν πρότι περίπτοςι βρίςκυμε πρότα το γινόμενο τον διο παραγόντον κε έπιτα το διερύμε δια 2. Στι δέφτερι περίπτοςι διερύμε δια 2 τον ένα απο τυς παράγοντες, έπιτα βρίςκομε το γινόμενο τυ εκςαγόμενυ επι τον δέφτερο παράγοντα.

Για να διερέςυμε το γινόμενο διο παραγόντον με οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέςυμε με τον ίδιο αριθμο τον ένα απο τυς παράγοντες κε το πιλίκο να πολαπλαςιάςυμε επι τον άλον παράγοντα

Αφτο με γράματα γράφετε: $(a\cdot b):m=\frac{a}{m}\cdot b=a\cdot\frac{b}{m}$.

Ο κανόνας αλιθέβι κι αν έχυμε περιςότερυς παράγοντες.

2. Πρέπι το γινόμενο τον αριθμον 3, 12 κε 8 να το διερέςυμε δια 2.

ίτε:
$$(3\cdot 12\cdot 8):2=\frac{288}{2}=144,$$
$$(3\cdot 12\cdot 8):2=3\cdot 6\cdot 8=3\cdot 12\cdot 4=144.$$

Στον δέφτερο τρόπο διερύμε δια τυ 2 τον ένα απο τυς παράγοντες (12 · 8) αντις να διερέςυμε το γινόμενό-τυς.

Διέρεςι τυ αθρίζματος. 3. Ενας τραχτορίςτας πίρε για το πρότο ίμιςι τυ μίνα 84 ρύβλ. κε για το δέφτερο — 91 ρύβλ. Πόςες εργάςιμες ιμέρες ίχε ο τραχτορίςτας ςτο μίνα αφτο, αν για κάθε εργάςιμι ιμέρα κέρδιζε 7 ρύβλια;

Λίςι. Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε με διο τρόπυς. Μπορύμε να προςθέςυμε όλα τα χρίματα πυ πίρε κε να τα διερέςυμε δια τυ 7, ίτε να βρύμε χοριςτα τον αριθμο τον ιμερον, πυ δύλεπςε το πρότο κε το δέφτερο ίμιςι τυ μίνα.

ίτε:
$$(84+91):7=175:7=25 \text{ μέρες.}$$
$$84:7+91:7=12+13=25 \text{ μέρες.}$$

Σινκρίνοντας τα εκςαγόμενα, μπορύμε να γράπςυμε τιν ιςότιτα:

$$(84+91):7=84:7+91:7=12+13=25.$$

Για να διερέςυμε το άθριζμα διο αριθμον με οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέςυμε με τον αριθμο αφτον κάθε προςθετέο χοριςτα κε να προςθέςυμε τα πιλίκα, πυ βρίκαμε.

Αφτο με γράματα γράφετε: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

Ο κανόνας αφτος αλιθέβι κε για το άθριζμα τριον, τεςάρον κε γενικα πολον προςθετέον.

4. Ας διερέςυμε (140 + 280 + 360) : 10:

$$(140+280+360):10=140:10+280:10+360:10=$$
$$=14+28+36=78,$$

ίτε:
$$\frac{780}{10}=78.$$

4*

Αφτο με γράματα γράφετε: $\frac{a+b+c+d}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}$.

Παρόμιος κανόνας ιπάρχι κε για τι διέρεςι τις διαφορας.

Διέρεςι τις διαφορας. 5. Να διερεθι ι διαφορα τον διο αριθμον 375 κε 255 δια τυ 15.

Λ ί ς ι. 1) $(375-255):15=\frac{120}{15}=8$, ίτε

2) $(375-255):15=(375:15)-(255:15)=25-17=8$.

Το αποτέλεζμα ίνε το ίδιο.

Για να διερέςυμε τι διαφορα διο αριθμον με οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέςυμε χοριςτα το μιοτέο κε τον αφερετέο με τον αριθμο αφτον κε απ' το πρότο πιλίκο να αφερέςυμε το δέφτερο.

Παράςταςι το κανόνα με γράματα: $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ι διέρεςι τυ αθρίζματος κε τις διαφορας δι' ακέρεο αριθμο μονάχα τότε μπορι να διεκςαχθι με τον τρόπο αφτο, όταν ι προςθετέι, ίτε ο μιοτέος κε ο αφερετέος, διερύντε δια τυ αριθμυ αφτο, δίνοντας ακέρεο αριθμο στο πιλίκο.

§ 19. Διέρεςι με αριθμο, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα.

Αν ςινκρίνυμε τυς αριθμυς 541 κε 5410, θα δύμε, πος ο δέφτερος αριθμος ίνε 10 φορες μεγαλίτερος απ' τον πρότο, πος ο αριθμος τον εκατοντάδον τυ πρότυ αριθμυ αποτελι τις χιλιάδες τυ δέφτερυ, ο αριθμος τον δεκάδον—τις εκατοντάδες, τον μονάδον—τις δεκάδες, ίτε ότι πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον πρότο αριθμο επι 10 για να βρύμε το δέφτερο.

Αν γράπςυμε τυς αριθμυς αφτυς με αντίθετι ςιρα—κατα τι ςιρα τις ελάτοςις τον μεγεθόν-τυς: 5410, 541, τότε ο ακόλυθος αριθμος ίνε μικρότερος τυ προιγυμένυ-τυ, γι' αφτο τον προιγύμενο αριθμο πρέπι να τον διερέςυμε δια 10, για να βρύμε τον ακόλυθο: κατα τι διέρεςι δια 10 ακέρευ αριθμυ με

μιδενικα ςτο τέλος, (κατα τιν ελάτοςί-τυ 10 φορες) ίταν ανάνκι να εκςαλίπςυμε ένα μιδενικο.

Κατα τι διέρεςι ενος αριθμυ δια 100 πρέπι να διερέςυμε τον αριθμο αφτο δια 10 κε το πιλίκο, πυ θα βρύμε, να το διερέςυμε ακόμι μια φορα δια 10 (να εκςαλίπςυμε διλ. διο μιδενικα απο το τέλος). Το ίδιο κάνυμε κι όταν διερύμε με 1000, 10 000, γενικα με κάθε αριθμο πυ έχι τι μονάδα με τα μιδενικα ςτο τέλος, διλ. δια τις δίναμις τυ αριθμυ 10 θα διερέςυμε διαδοχικα δια 10.

1) 4 513 000 : 100 = (4 513 000 : 10) : 10 = 451 300 : 10 = 45130,

2) 356 000 : 1000 = (356 000 : 10) : 10 : 10 = (35 600 : 10) : : 10 = 3560 : 10 = 356.

Στα παραδίγματα αφτα ο διερετέος τελιόνι ςε μιδενικα κε ο διερέτις ίνε αριθμος, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα. Κατα τι διέρεςι θα μπορύςαμε αμέςος να εκςαλίπςυμε ςτο διερετέο τόςα μιδενικα, όςα ιπάρχυν ςτο διερέτι. Ι διέρεςι μπόρεςε να γίνι ολόκλιρι γιατι ο διερετέος έχι ςτο τέλος-τυ τόςα μιδενικα, όςα έχι ο διερέτις, ίτε κε περιςότερα.

Για να διερέςυμε αριθμο, πυ τελιόνι ςε μιδενικα, δια αριθμυ, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα ςτο τέλος-τυ, πρέπι να εκςαλίπςυμε απο το διερετέο τόςα μιδενικα, όςα έχι ο διερέτις.

§ 20. Διέρεςι αριθμον, πυ τελιόνυν ςε μιδενικα.

Ι αχςία τις καθιμερινις παραγογις τυ εργοςταςίυ εχτιμάτε 128 000 ρύβλ. Το εργοςτάςιο βγάζι 400 τ μαντέμι. Να βρεθι ι μέςι αχςία τυ 1 τ μαντεμιυ.

Λ ί ς ι. Εδο πρέπι να κάνυμε διέρεςι 128 000 : 400. Εμις όμος μπορύμε να απλυςτέπςυμε τι λίςι, ελατόνοντας το διερετέο κε το διερέτι 100 φορες. Με τιν πράχςι αφτι το πιλίκο δεν αλάζι.

128 000 : 400 = 1280 : 4 = 320 ρύβλα.

Για να βρύμε το πιλίκο ςτιν περίπτοςι, κατα τιν οπία ο διερέτεος κε ο διερέτις τελιόνυν ςε μιδενικα, αρκι να εκςαλίπςυμε απο το τέλος-τυς τον ίδιο αριθμο μιδενικον. Το πιλίκο απ' αφτο δεν αλάζι.

§ 21. Διέρεσι στιν περίπτοσι, πυ προκίπτι μονοψίφιο πιλίκο.

1. Να βρεθι το πιλίκο: 651 : 217.

Λ ί σ ι. Διερύμε μονάχα εκίνα τα ψιφία, τα οπία μπορύμε να διερέσυμε σίμφονα με τον πίνακα τυ πολαπλασιαζμυ. Γι' αφτο πέρνυμε τις μονάδες τις ανότερις τάξις τυ διερετέυ κε κε τις διερύμε δια τον μονάδον τις ανότερις τάξις τυ διερέτι. Στο παράδιγμά-μας διερύμε τον 6 δια 2 κε βρίσκυμε: 6 : 2 = 3. Τότε 651 : 217 = 3.

Δοκιμάζυμε αν ίνε σοστο το αποτέλεσμα, πολαπλασιάζοντας το διερέτι επι το πιλίκο:

$$217 \cdot 3 = 651.$$

Αν το πρότο ψιφίο τυ διερετέυ, ίνε αριθμος μικρότερος τυ πρότυ ψιφίυ τυ διερέτι, τότε πέρνυμε τον αριθμο, πυ σχιματίζετε απ' τα διο πρότα ψιφία τυ διερετέυ κε τον διερύμε δια τυ πρότυ ψιφίυ τυ διερέτι.

2. 20 595 : 4119 = 5.

Εδο διερύμε τον 20 δια τυ 4. Αν ι δοκιμι δίνι γινόμενο μεγαλίτερο τυ διερετέυ, τότε στο πιλίκο πρέπι να γράψυμε αριθμο μικρότερο κατα μια μονάδα κε κάνυμε ξανα δοκιμι τις διέρεσις. Ετσι εξακολυθύμε τιν πράξι, οσότυ να βρύμε στο πιλίκο αριθμο, τον οπίο πολαπλασιάζοντας επι τον διερέτι, να βρύμε γινόμενο μικρότερο τυ διερετέυ, ίτε ίσο μ' αφτον. Ο τρόπος αφτος τις διέρεσις, για να βρύμε μονοψίφιο πιλίκο, απετι ο διερετέος να έχι τόσα ψιφία, όσα έχι ο διερέτις (αν το πρότο ψιφίο τυ διερετέυ παραστένι αριθμο μεγαλίτερο απο το πρότο ψιφίο τυ διερέτι), ίτε κατα ένα περισότερο (αν ο αριθμος, πυ παραστένι το πρότο ψιφίο τυ διερετέυ, ίνε μικρότερος τυ διερέτι).

Ιπάρχι ακόμα ένας τρόπος, πυ επιτρέπι να καθορίσυμε εκίνες τις περιπτόσις τις διέρεσις, όταν στο πιλ.ίκο βρίσκυμε μονοψίφιο αριθμο.

Δόθικαν διο αριθμι: διερετέος κε διερέτις. Γράφυμε απ' τα δεξια στο τέλος τυ διερετέυ μιδενικο. Βρίσκυμε νέο αριθμο, μεγαλίτερο τυ διερέτι 10 φορες. Αν ο νέος αφτος αριθμος θάνε μεγαλίτερος τυ διερετέυ, τότε το πιλίκο απ' τι διέρεσι τον διο δομένον αριθμον θάνε μονοψίφιο, αν ίνε μικρότερος, πολιψίφιο.

Τα παραδίγματα τις παραγράφυ αφτις μας δίνανε μονοψίφιο πιλίκο επιδι:

$$2170 > 651 \text{ κε } 41\,190 > 20\,595.$$

Για να βρύμε μονοψίφιο πιλίκο, πρέπι να πάρυμε το πρότο ψιφίο τυ διερετέυ κε να το διερέσυμε δια τυ πρότυ ψιφίυ τυ διερέτι. Ιστερα απ' αφτο πρέπι να πολαπλασιάσυμε το διερέτι επι το εξαγόμενο μονοψίφιο πιλίκο. Το γινόμενο, πυ προκίπτι, πρέπι να ισύτε με το διερετέο. Αν το γινόμενο αφτο ίνε μεγαλίτερο απ' το διερετέο, πρέπι να ελατόσυμε το πιλίκο κατα μια μονάδα. Ετσι εξακολυθυν, οσότυ το γινόμενο, πυ προκίπτι, να ισύτε με το διερετέο. Αν κατα τι διέρεσι μένι κατάλιπο, τότε αφτο πάντα πρέπι να ίνε μικρότερο απο το διερέτι.

Στις περιπτόσις εκίνες, όταν το πρότο ψιφίο τυ διερετέυ ίνε αριθμος μικρότερος τυ πρότυ ψιφίυ τυ διερέτι, στο διερετέο πέρνυν τον αριθμο, πυ αποτελίτε απο τα διο πρότα ψιφία τυ διερετέυ.

§ 22. Διέρεσι με κατάλιπο.

Πάντα δεν ίνε δινατο να γίνι ι διέρεσι χορις κατάλιπο.

1. Ο πατέρας έδοσε στο γιό-τυ 2 ρύβλ. για να αγοράσι ιλεχτρικες λάμπες. Στο μαγαζι βρέθικαν μονάχα λάμπες αξίας 75 καπ. ι κάθε μια. Πόσες λάμπες μπορι να αγοράσι το πεδι κε πόσα ρέστα θα πάρι;

Λ ί σ ι. Διερόντας το 200 δια 75, θα έχυμε πιλίκο 2 κε θα μίνυν 50 καπίκια. Το πεδι μπόρεσε να αγοράσι διο λάμπες κε τυ έδοσαν ρέστα 50 καπ. Αφτα θα ίνε το κατάλιπο απο τι διέρεσι τυ 200 δια 75.

Ο ρ ι σ μ ο ς. Αν ο διερετέος δεν διερίτε ακριβος δια τυ διερέτι, τότε ι διαφορα μεταξι τυ διερετέυ κε τυ γινομένυ τυ διερέτι επι το πιλίκο, ονομάζετε κατάλιπο.

Σ ι μ ί ο ς ι. 1. Το κατάλιπο πρέπι πάντα να ίνε μικρότερο απο τον διερέτι.

2. Μπορύμε να πύμε, πος το κατάλιπο ισύτε με μιδενικο, αν ο διερετέος διερίτε ακριβος δια τυ διερέτι.

Ας κάνυμε τι δοκιμι τυ 1-υ προβλίματος: για τις 2 λάμπες πλιρόσανε 1 ρ. 50 κ. αν προςθέςυμε το ιπόλιπο 50 καπ., τότε θα βρύμε 2 ρύβλ.

Ας γράπςυμε τι δοκιμι ςίντομα:

$$75 \cdot 2 + 50 = 200 \text{ καπ.} = 2 \text{ ρύβλια.}$$

Εδο το 200 ίνε ο διερετέος, το 75 ο διερέτις, το 2 το πιλίκο, το 50 το κατάλιπο. Σ' όλες τις περιπτόςις τις διέρεςις με κατάλιπο έχυμε:

Ο διερετέος ιςύτε με το γινόμενο τυ διερέτι επι το πιλίκο ςιν το κατάλιπο.

Παράςταςι τυ κανόνα με γράματα $a = bq + c$, a διερετέος, b διερέτις, q πιλίκο, c κατάλιπο.

Τον ίδιο κανόνα μεριχες φορες τον διατιπόνυν αλιότικα.

Ο διερετέος πλιν τυ ιπολίπυ ιςύτε με το διερέτι, επι το πιλίκο.

Παράςταςι τυ κανόνα με γράματα: $a - c = bq$, όπυ a ίνε διερετέος b διερέτις, q πιλίκο κε c κατάλιπο.

2. $\frac{135}{12}$ δίνι πιλίκο 11 κε κατάλιπο 3, ίτε $(135 - 3) = 12 \cdot 11$.

Πολι έφκολα μπορύμε να βρύμε το πιλίκο κε το κατάλιπο ςτιν περίπτοςι τις διέρεςις οπιυδίποτε αριθμυ με άλον, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα.

3. Να βρεθι το πιλίκο κε το κατάλιπο:

1) 87 536 : 1000, 2) 127 531 : 10 000.

Λ ί ς ι. 1) 87 536 = 87 · 1000 + 536.

Βρίςκυμε πιλίκο 87 κε κατάλιπο 536.

Το ίδιο αποτέλεςμα βρίςκυμε χορίζοντας με γραμι ίτε με απόςτροφο τις χιλιάδες απο τις μονάδες τον κατότερον τάκςεον.

87 536 = 87' 536.

Στ' αριςτερα βρίςκυμε το πιλίκο 87, ςτα δεκςια το ιπόλιπο 536.

Στο δέφτερο παράδιγμα διερύμε δια 10 000. Για να βρύμε

το πιλίκο πρέπι να χορίςυμε απο το διερετέο τις δεκάδες τον χιλιάδον:

127 531 = 12' 7531.

Το πιλίκο ίνε το 12 κε το κατάλιπο το 7531.

Για να βρύμε το πιλίκο κε το κατάλιπο κατα τι διέρεςι ενος αριθμυ με άλον, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα, πρέπι να χορίςυμε απ' το δεκςιο μέρος τυ διερετέυ τόςα πςιφία, όςα μιδενικα έχι ο διερέτις ςτο τέλος-τυ. Ο αριθμος πυ παραςτένι τα πςιφία, πυ έμιναν δίχνι το πιλίκο, κε τα χοριςμένα πςιφία δίχνυν το κατάλιπο.

§ 23. Ι αλαγι τυ καταλίπυ.

Ας εκςετάςυμε τί ςιμβένι με το κατάλιπο, όταν αλάκςυμε το διερετέο κε το διερέτι.

Το εργοςτάςιο έδοςε για τιν αγορα αφτοκινίτον 48 700 ρύβ. Κάθε αφτοκίνιτο, πυ αγόραςε, κόςτιςε 8000 ρύβ. Πόςα αφτοκίνιτα αγόραςε κε πόςα χρίματα έμιναν;

Λ ί ς ι. Πρέπι να διερέςυμε τον 48 700 δια τυ 8000· βρίςκυμε πιλίκο 6 κε κατάλιπο 700.

Αλα για να απλυςτέπςυμε τιν πράκςι μπορύμε να διαγράπςυμε τον ίδιο αριθμο μιδενικον κε απο το διερετέο κε απο το διερέτι. Το πιλίκο δεν αλάζι, αν ελατόςυμε 100 φορες το διερετέο κε το διερέτι, κε θα έχυμε 487 : 80· το πιλίκο κςανα θα ίνε το 6, αλα κατάλιπο θα μένι 7. Αφτο θα ελατοθι 100 φορες.

Απο τι λίςι τυ παραδίγματος αφτυ βγάζυμε τον ακόλυθο κανόνα:

Οταν πολαπλαςιάζυμε ίτε διερύμε το διερετέο κε το διερέτι με ένα κε τον αφτον αριθμο, τότε κε το ιπόλιπο πολαπλαςιάζετε ίτε διερίτε με τον ίδιο αριθμο. Το πιλίκο μ'αφτο δεν αλάζι.

§ 24. Διέρεςι κατα τιν οπία προκίπτι πολιπςίφιο πιλίκο.

Στιν περίπτοςι αφτι ι διέρεςι κςεχορίζετε ςε ιδιέτερες διερέςις, ςτις οπίες διερέτις θα ίνε ένας αριθμος κε ο αριθμος πυ προκίπτι θα ίνε μονοπςίφιο πιλίκο. Το ςιμίο τις διέρεςις θα ίνε └ (ορθι γονία).

1. Να διερεθι ο 21 828 δια τυ 642. Παράςταςι τις διέρεςις:

```
  21828 |642
−1926   |34
  2568
−2568
```

Θα δόςυμε ακόμα ένα παράδιγμα διέρεςις.

2. Να διερεθι $37\,943\,491 : 943$.

Λ ί ς ι:

```
  37 943 491 |943
−37 72       |40 237
     223
     2234
    −1886
      3489
    −2829
       6601
     −6601
```

Στο παράδιγμα αφτο, γράφοντας ςτο πρότο κατάλιπο 22 ένα πςιφίο τυ διερετέυ, βρίκαμε τον αριθμο 223, πυ δεν διερίτε δια τυ 943. Στις περιπτόςις αφτες πρέπι να βάζυμε μιδεν ςτο πιλίκο, το οπίο κε χάναμε, κε τότε μονάχα κατεβάζυμε ςτο κατάλιπο το ακόλυθο πςιφίο τυ διερετέυ.

Για να διερέςυμε έναν αριθμο με άλον, χορίζυμε απ' τα αριςτερα, αρχίζοντας απ' το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ, τόςα πςιφία, όςα διερύμενα δια τυ διερέτι θα δόςυν μονοπςίφιο πιλίκο. Στα δεκςια τυ πρότυ κατάλιπυ κατεβάζυν το ακόλυθο πςιφίο τυ διερετέυ, κ' έτςι ςχιματίζυν δέφτερο διερετέο. Αν διερέςυμε αφτον τον δέφτερο διερετέο δια τυ διερέτι, τότε θα έχυμε το δέφτερο πςιφίο τυ ζιτύμενυ πιλίκυ, κε το κατάλιπο θα ίνε δέφτερο κατάλιπο. Ετςι, εκςακολυθυν να κάνυν το ίδιο κε με το κατάλιπο αφτο, οςότυ να εκςαντλιθυν όλα τα πςιφία τυ διερετέυ. Το τελεφτέο κατάλιπο θα ίνε το κατάλιπο τις διέρεςις.

V. Ι ΣΙΡΑ ΤΟΝ ΠΡΑΚΣΕΟΝ. ΠΑΡΕΝΘΕΣΙΣ.

§ 1. Ι ςιρα τον πράκςεον μιας βαθμίδας.

Τα μαθιματικα ςιμία δίχνυν, πιές πράκςις κε με πιά ςιρα πρέπι να τις κάνυμε πάνο ςτυς δομένυς αριθμυς. Ι γραφι με τα μαθιματικα ςιμία πρέπι να ίνε απλι, ακριβις κε οριζμένι. Προπάντον ίνε ςπυδέο, να μιν επιτρέπςι ι γραφι αφτι να εκςιγίςυμε όπος τίχι τι ςιρα τον πράκςεον.

1. Ι πράκςις μιας κε τις αφτις βαθμίδας εκτελύντε με τι ςιρα εκίνι, με τιν οπία ίνε γραμένες:

1) $63 - 18 + 15 - 40 + 8 + 1 = 29$, 2) $80 : 2 \cdot 5 : 4 : 10 = 5$

Ας βρύμε τα εκςαγόμενα, αλάζοντας τι ςιρα τον πράκςεον:

1) $63 - 18 + 15 - 40 + 8 + 1 = 29$	2) $80 : 2 \cdot 5 : 4 : 10 = 5$
$63 + 15 - 40 + 8 - 18 + 1 = 29$	$80 : 2 \cdot 5 : 10 : 4 = 5$
$63 - 40 + 8 - 18 + 15 + 1 = 29$	$80 : 2 : 10 \cdot 5 : 4 = 5$
$63 + 1 + 15 - 18 - 40 + 8 = 29$	$80 : 10 : 2 \cdot 5 : 4 = 5$
$63 - 18 - 40 + 1 + 15 + 8 = 29$	$80 : 10 \cdot 5 : 2 : 4 = 5$

Το εκςαγόμενο ς' όλες αφτες τις περιπτόςις μένι το ίδιο.

2. Ιπάρχυν, οςτόςο, περιπτόςις, πυ κατα τιν εκτέλεςι τον πράκςεον τις ίδιας βαθμίδας θέλυν να αλάζυν τι ςιρα τον πράκςεον:

1) $72 - 45 - 13 = 14$, αλα 2) $72 - (45 - 13) = 40$.

Στο πρότο παράδιγμα πρότα αφερύςαν τον 45, κε έπιτα αφερύςαν το 13. Στο δέφτερο — πρότα απο τον 45 αφέρεςαν το 13, κε έπιτα το εκςαγόμενο αφέρεςαν απο το 72. Σ' αφτες τις περιπτόςις, όταν θέλυν να ιποδίκςυν τι ςιρα τον πράκςεον, εκςον απ' τα ςιμία μεταχιρίζοντε τις παρενθέςις.

Παρενθέςις ιπάρχυν τριον ιδον: 1) απλες $(15 - 7) \cdot 7$, 2) ανκίλες $[5 + 5 \cdot (12 - 3)] \cdot 2$, 3) πικίλες $\{(8 + 7) \cdot [(5 + 3) \cdot 2 - 4]\} \cdot 5$.

Οταν εκτελύμε πράκςις με παρενθέςις, πρέπι βαθμιδον να ανίκςυμε τις παρενθέςις διλ. να κάνυμε τις πράκςις, πυ ίνε μέςα ςτις παρενθέςις κε ςτι θέςι-τυς να βάλυμε το εκςαγόμενο.

Σ ι μ ί ο ς ι. Οταν ανίγυμε τις παρενθέςις, πρέπι ν' αρχίζυμε απο τις εςοτερικες παρενθέςις.

3. Γράπςτε κε βρέςτε το εκςαγόμενο: απο το 43 να αφερεθι το άθριζμα 13 κε 8.

Λ ί ς ι. 43 — (13 + 8) = 43 — 21 = 22.

Εδο αν γράφαμε το πρόβλιμα χορις παρενθέςις, θα παραμορφόνονταν το νόιμα τυ προβλίματος: θα βρίςκαμε 43—13+8=38.

Για να κάνυμε τις πράκςις τις ίδιας βαθμίδας ι χρισιμοπίισι τον παρενθέςεον ίνε απαρέτιτι ς' εκίνες τις περιπτόςις, όταν προςθέτυν ίτε αφερυν τα εκςαγόμενα τον πράκςεον, πυ ιποδιχτίκανε, χορις να κάνυνε αφτες τις ίδιες πράκςις.

4. Γράπςτε κε βρέςτε:

1) Στο 15 να προςτεθι το άθριζμα τον αριθμον 7, 13, κε 8:

15 +(7+13+8) =15 +28 = 43.

2) Απο το 40 να αφερεθι ι διαφορα τον αριθμον 19 κε 12:

40 — (19 — 12) = 40 — 7 = 33.

3) Στον 8 να προςτεθι ι διαφορα τον αριθμον 71 κε 62:

8 + (71 — 62) = 8 + 9 = 17.

§ 2. Ι ςιρα τον πράκςεον τον διαφόρον βαθμίδον.

Ο κανόνας τις ςιρας τον πράκςεον τις ίδιας βαθμίδας δεν εφαρμόζετε ςτις πράκςις τον διαφόρον βαθμίδον. Γι' αφτες τις πράκςις ιςχίι ο ακόλυθος κανόνας:

Ι πράκςις τον ανότερον βαθμίδον γίνοντε προτίτερα απ' τις πράκςις τον κατότερον βαθμίδον.

1. Να βρεθι: 72 — 8 · 3. Αν θα κάνυμε τις πράκςις με τι ςιρα, όπος ίνε γραμένες, τότε θα αφερέςυμε απο το 72 το 8 κε το εκςαγόμενο θα το πολαπλαςιάςυμε επι το 3. Αλα ςίμφονα με τον κανόνα, πυ ιποδίχνι τι ςιρα τις εχτέλεςις τον πράκςεον ς' εκίνες τις περιπτόςις, όταν έχυμε πράκςις διαφόρον βαθμίδον, τις πράκςις τον ανότερον βαθμίδον τις κάνυμε ςε πρότι ςιρα. Μ'αφτο μπορύμε ν' αποφίγυμε να γράπςυμε τις παρενθέςις κατα τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι.

Δεν γράφυν: 72 — (8 · 3), αλα γράφυν: 72 — 8 · 3 = 48.

Στις περιπτόςις, πυ μπορι να ςιμβι παρεκςίγιςι ςτι ςιρα τον πράκςεον τον διαφόρον βαθμίδον, χριςιμοπιύνε τις παρενθέςις. Κε εδο, όπος κε όταν κάνυν τις πράκςις τις ίδιας βαθμίδας, ςτις παρενθέςις κλίνυν τα εκςαγόμενα τον πράκςεον, πυ έχυν ιποδιχτι, όχι όμος εχτελεςτι τελιοτικα.

2 Ιποδίκςτε κε βρέςτε: το άθριζμα τον γινομένον τυ αριθμυ 5 επι 6 κε επι 3 διερύμενο δια τις διαφορας αφτον τον γινομένον:

(5·6 + 5·3) : (5 · 6 — 5 · 3) = (30 + 15) : (30 — 15) = 45 : 15 = 3.

Ι γραφι χορις παρενθέςις θα έδινε αλο λανθαζμένο εκςαγόμενο:

5 · 6 + 5 · 3 : 5 · 6 — 5 · 3 = 30 + 18 — 15 = 48 — 15 = 33.

Σ ι μ ί ο ς ι. Το ςιμίο τις διέρεςις μπορι να αντικαταςταθι με τι γραμι τυ κλάζματος. Ι γραμι αφτι αντικαταςτένι επίςις κε τις παρενθέςις.

3. Να διερεθι: (15 + 25) : 5. Αφτο μπορι να γραφι κι αλιότικα:

$$(15 + 25) : 5 = \frac{15 + 25}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

VI. ΔΙΕΡΕΤΟΤΙΤΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Διερετότιτα τον αριθμον.

Αν ένας ακέρεος αριθμος διερίτε δια άλυ χορις κατάλιπο, τότε ο πρότος αριθμος ονομάζετε πολαπλάςιο τυ δέφτερυ αριθμυ, ο δέφτερος αριθμος ονομάζετε διερέτις τυ πρότυ αριθμυ.

Ο αριθμος 1424 ίνε πολαπλάςιο τυ αριθμυ 4. Ο αριθμος 4 ίνε διερέτις τυ αριθμυ 1424.

Σ ι μ ί ο ς ι. Οταν παρακάτο θα πύμε, πος ένας αριθμος διερίτε με κάπιον άλον αριθμο, τότε πάντα θα έχυμε ιπόψι τέλια διέρεςι, χορις κατάλιπο.

Ας γράπςυμε μια ςιρα ακέρεον αριθμον: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12... Κςέρυμε πος αφτι ι ςιρα τον αριθμον ονομάζετε φ ι ς ι κ ι ς ι ρ α αριθμον.

Ολι ι αριθμι τις φιςικις ςιρας διερύντε με τιν μονάδα. Διερύντε ακόμα κε με τον εαφτό-τυς.

Ολυς τυς αριθμυς τις φιςικις ςιρας μπορύμε να τυς διερέςυμε ακριβος δια τυ εαφτύ-τυς κε δια τις μονάδας.

Ανάμεσα στυς αριθμυς τις φισικις σιρας ιπάρχυν τέτιι αριθμι, ι οπίι εχτος απο τι μονάδα κε τον εαφτό-τυς, έχυν κε μερικυς άλυς διερέτες. Π. χ. ο αριθμος 15 διερίτε δια τυ 1, δια τυ 15, δια τυ 3, κε δια τυ 5· 15 : 1 = 15, 15 : 15 = 1, 15 : 3 = 5, 15 : 5 = 3.

§ 2. Ι ιδιότιτα τυ αθρίζματος, στιν οπία στιρίζοντε τα σιμπεράζματα τον γνοριζμάτον τις διερετότιτας.

Ι τρόπι, με τυς οπίυς μπορύμε να μάθυμε, χορις να κάνυμε τι διέρεσι, αν ένας αριθμος ίνε διερέτις τυ άλυ, ονομάζοντε γνορίζματα τις διερετότιτας.

Το σιμπέραζμα τον γνοριζμάτον τις διερετότιτας στιρίζετε στις ακόλυθες ιδιότιτες τυ αθρίζματος.

Ι. Αν κάθε προςθετέος διερίτε ακριβος δια οπιυδίποτε αριθμυ, τότε κι όλο το άθριζμα διερίτε δια τυ ίδιυ αριθμυ.

ΙΙ. Αν όλι ι προςθετέι, εχτος ενος, διερύντε δια οπιυδίποτε αριθμυ, κε αφτος ο ένας προςθετέος δεν διερίτε δια τυ ίδιυ αριθμυ, τότε κε όλο το άθριζμα δεν διερίτε δια τυ ίδιυ αριθμυ.

1. $20 + 30 + 700 + 50 = 800$. Στιν περίπτοσι αφτι όλι προςθετέι διερύντε δια τυ 10, κε το άθριζμα διερίτε δια τυ 10.

2. $20 + 30 + 700 + 49 = 799$. Στιν περίπτοσι αφτι όλι ι προςθετέι, εχτος ενος, — τυ 49 — διερύντε δια τυ 10, κε το άθριζμα δεν διερίτε δια τυ 10.

§ 3. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 10, δια τυ 100, δια τυ 1000.

Απ' τυς κανόνες τις διέρεσις δια τον αριθμον 10, 100 κε 1000, πυ τελιόνυν σε μιδενικα, φένετε πος ο αριθμος, πυ διερίτε δια 10 χορις κατάλιπο, πρέπι να έχι στο τέλος ένα τυλάχιστο μιδενικο, επιδι ς' αφτι τιν περίπτοσι αφτος θα αποτελίτε απο ολόκλιρες δεκάδες.

Ι αριθμι 10, 50, 90, 100, 400, 1000, 3500, διερύντε δια 10.

Ι αριθμι 7, 23, 108, 51 916 δεν διερύντε δια 10.

Δια τυ 10 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν σε μιδενικο.

Ι αριθμι 200, 800, 15 000 διερύντε δια 100, ενο ι αριθμι 270, 420, 1730 δεν διερύντε δια τυ 100.

Δια τυ 100 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν σε διο μιδενικα.

Παρόμια μ' αφτο:

Δια τυ 1000 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν σε τρία μιδενικα.

§ 4. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια 2 κε δια 5.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Ολι ι αριθμι, πυ ίνε πολαπλάσιι τυ 2 ονομάζοντε άρτιι αριθμι ίτε ζιγι. Ολι ι άλι αριθμι ονομάζοντε περιτι.

Ο δέκα διερίτε κε δια τυ 2 κε δια τυ 5.

$10 : 2 = 5$, $10 : 5 = 2$.

Οςτε, κάθε αριθμος, πυ αποτελίτε απο δεκάδες, πρέπι να διερίτε δια 2 κε δια 5. Κε επιδι ι αριθμι πυ αποτελύντε απο δεκάδες έχυν στο τέλος μιδενικο, ι παρυσία τυ μιδενικυ στο τέλος τυ αριθμυ, δίχνι, πος ο αριθμος διερίτε δια 2 κε δια 5.

1) $470 : 2 = 235$, $5800 : 5 = 1160$.

Αν ο αριθμος δεν τελιόνι σε μιδενικο, τότε για να καταλάβυν αν διερίτε ο αριθμος δια 2 ίτε δια 5, τον χορίζυν σε διο προςθετέυς, απο τυς οπίυς ο πρότος προςθετέος πρέπι να αποτελίτε απο δεκάδες διλ. να τελιόνι σε μιδενικο κε να διερίτε δια 2 κε δια 5:

2) $385 : 5 = (380 + 5) : 5 = 380 : 5 + 5 : 5$, το 385 διερίτε δια 5.
3) $748 : 2 = (740 + 8) : 2 = 740 : 2 + 8 : 2$, το 748 διερίτε δια 2.
4) $928 : 5 = (920 + 8) : 5 = 920 : 5 + 8 : 5$, το 928 δεν διερίτε δια 5, γιατι ο δέφτερος προςθετέος 8 δεν διερίτε δια 5.

5) $67 : 2 = (60 + 7) : 2 = 60 : 2 + 7 : 2$, το 67 δεν διερίτε δια 2.

Ι λίσι εχςαρτάτε απο το τελεφτέο πςιφίο τυ αριθμυ.

Ετσι βρίςκυμε τα γνορίζματα τις διερετότιτας τυ αριθμυ δια 2 κε δια 5:

Δια 2 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε μιδενικο ίτε ςε άρτιο πςιφίο (2, 4, 6, 8).

Δια 5 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε μιδενικο ίτε ςε 5.

§ 5. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 4 κε δια τυ 25.

Ο 100 διερίτε δια 4 κε δια 25. Οςτε, κάθε αριθμος, πυ αποτελίτε απο εκατοντάδες, χορις να έχι δεκάδες κε μονάδες κε γι' αφτο τελιόνι ςε διο μιδενικα, πρέπι να διερίτε δια 4 κε δια 25.

1) $100 : 4 = 25$, $100 : 25 = 4$, $6200 : 4 = 1550$, $1700 : 25 = 68$.

2) $3868 : 4 = (3800 + 68) : 4 = 3800 : 4 + 68 : 4$. Το 3868 διερίτε δια τυ 4.

Χορίζοντας τον αριθμο 3868, όπος κάναμε ςτιν προιγύμενι παράγραφο, μπορύμε να τον παραςτένυμε με δίο προςθετέυς, απο τυς οπίυς ο ένας θα τελιόςι ςε διο μιδενικα κε γι' αφτο θα διερίτε δια 4 κε δια 25. Απ' τιν τέλια διέρεςι τυ δέφτερυ προςθετέυ δια 4 κε δια 25 εκςαρτάτε κε ι διερετότιτα όλυ τυ αριθμυ δια 4 κε 25.

3) $875 : 25 = (800 + 75) : 25 = 800 : 25 + 75 : 25$· το 875 διερίτε δια τυ 25.

4) $917 : 4 = (900 + 17) : 4 = 900 : 4 + 17 : 4$, το 917 δεν διερίτε δια 4, γιατι ο δέφτερος προςθετέος 17 δεν διερίτε δια τυ 4.

5) $1343 : 25 = (1300 + 43) : 25 = 1300 : 25 + 43 : 25$· το 1343 δεν διερίτε δια τυ 25.

Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 4 κε δια τυ 25.

Δια τυ 4 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε διο μιδενικα, καθος κε ι αριθμι, τον οπίον τα διο τελεφτέα πςιφία παραςτένυν αριθμο, πυ διερίτε δια τυ 4.

Δια τυ 25 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε διο μιδενικα, καθος κε ι αριθμι, τον οπίον τα διο τελεφτέα πςιφία αποτελυν αριθμο, πυ διερίτε δια τυ 25. Διλ. ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε 25, 50 ίτε 75.

§ 6. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 8.

Κάθε αριθμος, πυ τελιόνι ςε τρία μιδενικα, αποτελίτε απο χιλιάδες.

Μα το $1000 = 8 \times 125$, διερίτε διλ. δια τυ 8 κε δια τυ 125, γι' αφτο κε το άθριςμα χάμποςον χιλιάδον διερίτε δια τυ 8 κε δια τυ 125. Π.χ. $25\,000 : 8 = 3125$.

1) Μπορι να διερεθι το 45 328 δια τυ 8;

Αν αναλίςυμε τον αριθμο αφτον ςε άθριςμα τον αριθμον: $45\,000 + 328$, το 45 000 διερίτε δια τυ 8, το $328 : 8 = 41$, γι' αφτο κε το 45 328 διερίτε δια τυ 8.

2) $16\,242 : 8$, $16\,242 = 16\,000 + 242$. Αλα ο δέφτερος προςθετέος 242 δεν διερίτε δια 8· γι' αφτο κε το 16 242 δεν διερίτε δια 8.

Δια τυ 8 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε τρία μιδενικα, καθος κε ι αριθμι τον οπίον τα τρία τελεφτέα πςιφία αποτελυν αριθμο, πυ διερίτε δια τυ 8.

§ 7. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 9 κε τυ 3.

1. Ι αριθμι 9, 99, 999, κ.υ.κ., πυ ςχιματίζοντε απο τον 9, διερύντε ακριβος δια τυ 9 κε τυ 3.

Τυς αριθμυς: 10, 100, 1000, 10 000, μπορύμε να τυς χορίςυμε ςε προςθετέυς κε έτςι θα έχυμε τον ακόλυθο πιναχα:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 1\,000 &= 999 + 1 \\ 10\,000 &= 9999 + 1 \end{aligned}$$

Ο πίναχας αφτος δίχνι, πος ο αριθμος, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα ςτο τέλος, **διερύμενος δια τυ 9 δίνι κατάλιπο 1.**

2. Ας μάθυμε αν το 4332 διερίτε δια τυ 9.

Αναλίοντας τον αριθμο 4332 ςτις ιδιέτερες μονάδες τον διαφόρον τάκςεον θα έχυμε:

$$4332 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + \\ + 100 + 100 + 100 + \\ + 10 + 10 + 10 + \\ + 2$$

Αν παραστίσυμε κάθε μια χιλιάδα με $999 + 1$, κάθε μια εκατοντάδα $99 + 1$, κάθε δεκάδα $9 + 1$, θα έχυμε:

$$4332 = 999 + 999 + 999 + 999 + 4 + \\ + 99 + 99 + 99 + 3 + \\ + 9 + 9 + 9 + 3 + \\ + 2$$

Ι προςθετέι 999, 99, 9 διερύντε δια τυ 9 κε δια τυ 3. Οςτε ι διερετότιτα τυ αριθμυ αφτυ δια τυ 9 κε δια τυ 3 εκςαρτάτε απο το αν διερίτε δια τυ 9 κε δια τυ 3 ο αριθμος, πυ παραστένι το άθριζμα τον αριθμον τον μονάδον όλον τον τάκςεον: $4 + 3 + 3 + 2 = 12$. Αφτος ο αριθμος 12 διερίτε δια τυ 3, γι' αφτο κε όλος ο αριθμος διερίτε δια τυ 3. Ο αριθμος 12 δια τυ 9 δεν διερίτε, γι' αφτο κε ο 4332 δε διερίτε δια τυ 9.

3. Να βρεθι, αν το 3510 διερίτε δια τυ 9 κε δια τυ 3.

Ο αριθμος $3 + 5 + 1 = 9$ διερίτε τυ δια 9 κε δια τυ 3, γι' αφτο κε το 3510 διερίτε δια τυ 9 κε δια τυ 3.

Δια τυ 3 διερύντε εκίνι ι αριθμι, τον οπίον το άθριζμα τον πςιφίον διερίτε δια τυ 3.

Δια τυ 9 διερύντε εκίνι ι αριθμι, τον οπίον το άθριζμα τον πςιφίον διερίτε δια τυ 9.

4. Να βρεθι αν διερύντε δια 9 κε δια 3 ι αριθμι: 1) 14 382 2) 2760, 3) 1345.

1) 14 382 — το άθριζμα τον πςιφίον-τυ ίνε 18. Οςτε ο αριθμος 14 382 διερίτε δια 3 κε δια 9.

2) 2760 — το άθριζμα τον πςιφίον-τυ ίνε 15. Οςτε ο αριθμος 2760 δεν διερίτε δια τυ 9, διερίτε όμος δια τυ 3.

3) 1345 — το άθριζμα τον πςιφίον-τυ ίνε 13. Οςτε ο αριθμος 1345 δεν διερίτε ότε δια 3 ότε κε δια τυ 9.

Οταν καθορίςυν τιν διερετότιτα δια τυ 3, μπορυν τα πςιφία, πυ διερύντε δια τρία να τα παραλίπςυν απ' το άθριζμα καθος κε τα αθρίζματα, πυ διερύντε δια 3.

Οταν καθορίζυνε τι διερετότιτα δια τυ 9 παραλίπυν τυς αριθμυς κε τα αθρίζματα, πυ διερύντε δια τυ 9.

5. Ο αριθμος 865 417 διερίτε δια τυ 3;

Βρίςκυμε το άθριζμα: $8 + 6 + 5 + 4 + 1 + 7$. Κατα τιν πρόςθεςι παραλίπυμε το 6, γιατι ίνε γνοςτο πος διερίτε δια 3, καθος κε τα αθρίζματα $8 + 1$, κε $4 + 5$. Μένι μόνο το 7. Το 7 δεν διερίτε δια 3, όςτε ο αριθμος 865 417 δεν διερίτε δια τυ 3.

6. Να βρεθι, αν το 63 729 135 διερίτε δια τυ 9. Βρίςκυμε το άθριζμα $6 + 3 + 7 + 2 + 9 + 1 + 3 + 5$. Κατα τιν πρόςθεςι παραλίπυμε το 9 κε τα αθρίζματα $6 + 3$ κε $7 + 2$. Μένι $1 + 3 + 5 = 9$. Οςτε ο αριθμος διερίτε δια τυ 9.

§ 8. Αριθμι πρότι κε σίνθετι.

Τυς αριθμυς τις φιςικις ςιρας τυς διερύμε σε διο ομάδες: 1) σε πρότυς ίτε απλυς αριθμυς κε 2) σε σίνθετυς αριθμυς.

Ι πρότι αριθμι διερύντε μονάχα δια τις μονάδας κε τυ εαφτύ-τυς.

Ι σίνθετι αριθμι διερύντε όχι μονάχα δια τις μονάδας κε τυ εαφτύ-τυς, αλα κε δια κάπιυ άλυ αριθμυ.

Τα γνορίζματα τις διερετότιτας μας επιτρέπυν να κςεχορίςυμε τυς πρότυς αριθμυς απο τυς αριθμυς τις φιςικις ςιρας.

Ας γράπςυμε πίνακα με αριθμυς φιςικις ςιρας απο το 1 ός το 100.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,
15, 16, 17, 18, . . , 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Ας ζβίςυμε όλυς τυς άρτιυς αριθμυς, αρχίζοντας απ' το 4. Ετςι θα ζβιςτι κάθε δέφτερος αριθμος.

Ας ζβίςυμε τυς αριθμυς πυ διερύντε δια 3, εκτος απο τον ίδιο αριθμο τον 3. Εδο εμις ζβίνυμε κάθε τρίτο αριθμο απο τι ςιρα τον φιςικον αριθμον. Ετςι βαθμιδον ζβίνυμε όλυς τυς σίνθετυς αριθμυς, πυ διερύντε δια τυ 5, 7, 11 κε τον άλον πρότον αριθμον, πυ έμιναν στον πίνακα άζβιςτι.

Ιςτερα απο όλες τις διερέςις ι αριθμι, πυ έμιναν πίςο, ίνε εκίνι, πυ ςχιματίζυν τον πίνακα τον πρότον αριθμον. Μένυν πίςο μονάχα ι ακόλυθι αριθμι: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Τον πίναχα τον πρότον αριθμον μπορύμε να τον ςινεχίςυμε όςο θέλυμε.

§ 9. Ανάλιςι τον αριθμον ςε γινόμενο πρότον παραγόντον.

Κάθε ςίνθετο αριθμο μπορύμε να τον παραςτίςυμε ος γινόμενο άλον αριθμον, ίτε όπος λένε, να τον αναλίςυμε ςε γινόμενο παραγόντον.

1. Ας αναλίςυμε τον αριθμο 36 ςε παράγοντες.

Λίςι. $36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Ι ανάλιςι τυ αριθμυ ςε παράγοντες μπορί να γίνι με διάφορυς τρόπυς. Ι τελεφτέα ανάλιςι ($36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$) διακρίνετε απο τις άλες κατα τύτο, ότι όλι ι παράγοντές-τις ίνε πρότι αριθμι.

Κάθε αριθμο μπορύμε να τον παραςτίςυμε ος γινόμενο πρότον αριθμον μονάχα με ένα τρόπο.

2. Ας αναλίςυμε ςε γινόμενο πρότον παραγόντον τυς αριθμυς 30 χε 42.

Λίςι. 1) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$,   2) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Σιμίοςι. Σε κάθε γινόμενο ίνε δινατο να μεταθέςυμε τυς παράγοντες. Οταν ι παράγοντες ενος αριθμυ μένυν ι ίδιι χε αλάζυν μόνο θέςι, τότε θεορύμε ίδιες χε τις αναλίςις τυ αριθμυ αφτυ.

3. Ας αναλίςυμε τον αριθμο 30 ςε πρότυς παράγοντες.

Λίςι. $30 = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Ολες αφτες ίνε διάφορες γραφες τις ίδιας ανάλιςις. Ο αριθμος 30 έχι πρότυς παράγοντες: 2, 3, 5.

Σίμφονα με τυς χανόνες τις διέρεςις τυ γινομένυ μπορύμε να διερέςυμε τον αριθμο 30 χε δια 2, χε δια 3 χε δια 5. Γι' αφτο τυς παράγοντες 2, 3, 5, μπορύμε να τυς ονομάςυμε χε διερέτες τυ αριθμυ 30. Μεριχες φορες λένε «να αναλιθι ο αριθμος στυς πρότυς διερέτες» αντι να πύνε: «να αναλιθι ο αριθμος ςτυς πρότυς παράγοντες».

4. Κατα τιν ανάλιςι τυ αριθμυ ςτυς πρότυς παράγοντες απο μνίμις, πρότι φορα αναλίυνε τον αριθμο ςε χίνυς τυς παράγοντες,

πυ λογαριάζοντε κατάλιλι, χε ίςτερα χάθε πάραγοντα αναλίυν ςτυς πρότυς αριθμυς. Π.χ. $90 = 9 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$.

5. Ας αναλίςυμε τον αριθμο 546 ςε πρότυς παράγοντες.

Τι διάταχςι τις πράχςις τιν χάνυν έτςι:

546	2
273	3
91	7
13	13
1	

$546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

6. Ας αναλίςυμε ςε πρότυς παράγοντες τυς αριθμυς 1764, 5600.

1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$.

5600	100
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$100 = 10 \cdot 10 = 2^2 \cdot 5^2$.

$5600 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Οταν αναλίομε στυς πρότυς παράγοντες μεγάλυς αριθμυς, ακολυθύμε οριςμένι ςιρα στο γράπςιμο:

1. Πέρνυμε τυς παράγοντες απο τον πίναχα τον απλον αριθμον, εφαρμόζοντας τα γνορίζματα τις διερετότιτας.
2. Τυς παράγοντες τυς γράφυν ςίμφονα με τιν ανιύςα τιμί-τυς.
3. Χριςιμοπιύμε χατα τι γραφι τον εχθέτι τις δίναμις.
4. Στυς αριθμυς, πυ τελιόνυν ςε μιδενιχα ι ανάλιςι αρχίζι απο το 10, 100 χ.τ.λ., χι αφτο μας δίνι παράγοντες τόςες διάδες χε πεντάδες, όςα μιδενιχα έχυμε στο τέλος τυ αριθμυ.

§ 10. Μέγιςτος χινος διερέτις.

1. Κινος διερέτις χάμποςον αριθμον ονομάζετε ο αριθμος, με τον οπίον διερύντε αχριβος όλι ι δομένι αριθμι. Διάφορι αριθμι μπορυν να έχυν χινυς διερέτες, μπορυν όμος χε να μιν έχυν. Τι μονάδα ος διερέτι δεν τιν πέρνυν ιπόψι, επιδι χάθε αριθμος διερίτε δια τις μονάδας χορις να αφίνι κατάλιπο.

Ι αριθμι 6 χε 10 έχυν χινο διερέτι τον αριθμο 2· ι αριθμι

15 κε 24 έχυν κινο διερέτι τον αριθμο 3· ι αριθμι 180 κε 300 έχυν κινο διερέτι τον αριθμο 60 κε κάθε αριθμο, δια τυ οπίυ διερίτε το 60.

Ι αριθμι 5 κε 7· 25 κε 42 δεν έχυν κινο διερέτι.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Ι αριθμι, πυ δεν έχυν κινυς διερέτες εχτος τις μονάδας, ονομάζοντε πρότι προς αλίλυς (αμιβέα πρότι).

Τέτιι ίνε ι αριθμι 5 κε 7, 25 κε 42 αν κε ο ένας ίτε ακόμι κε ι διο απο το ζεβγάρι τον αριθμον, ίνε ςίνθετι.

2. Ο αριθμος 20 θα ίνε κινος διερέτις τον αριθμον 1000, 2000, 2500, 3000. Αλα εχτος τον διερέτι 20, ι ίδιι αριθμι έχυν κε άλυς κινυς διερέτες: 50, 100, 500. Ο μέγιςτος απ' αφτυς τυς διερέτες ίνε το 500.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Μέγιςτος κινος διερέτις κάμποσον αριθμον ονομάζετε ο μεγαλίτερος αριθμος, δια τυ οπίυ διερύντε όλι ι δομένι αριθμι.

3. Αν θα πάρυμε τυς αριθμυς 8 κε 15, τότε θα δύμε πος αφτι ι αριθμι έχυν τυς διερέτες-τυς: ο αριθμος 8 έχι διερέτες: 2, 4, 8. Ο αριθμος 15 έχι διερέτες: 3, 5, 15.

Εχτος απ' αφτο, όπος κςέρυμε, ο κάθε αριθμος διερίτε δια τις μονάδας. Ι αριθμι 8 κε 15 αν κε ςίνθετι, ίνε όμος αριθμι πρότι προς αλίλυς κε δεν έχυν καθόλυ κινυς διερέτες, εχτος απο τι μονάδα. Ι μονάδα θα ίνε γι' αφτυς κε ο μέγιςτος κινος διερέτις.

Διο αμιβέα πρότι αριθμι έχυν κινο διερέτι τι μονάδα.

4. 1) Να βρεθι ο μέγιςτος κινος διερέτις τον αριθμον 80, 40, 96.

Λ ί ς ι: Αναλίυμε αφτυς τυς αριθμυς ςε πρότυς παράγοντες ίτε διερέτες, ςινχρίνυμε τιν ανάλιςι κε διαλέγυμε τυς κινυς παράγοντες.

$$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{2^3} \cdot 10,$$
$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = \underline{2^3} \cdot 5$$
$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 = \underline{2^3} \cdot 12.$$

Το γινόμενο τον ιπογραμιζμένον κινον για όλυς τυς αριθμυς διερετον δίνι τον μέγιςτο κινο διερέτι.

Ι αριθμι 80, 40, 96 έχυν μέγιςτο κινο διερέτι τον $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

2) Να βρεθι ο μέγιςτος κινος διερέτις τον αριθμον 1800, 500 κε 700.

Λ ί ς ι. Στυς αριθμυς αφτυς ίνε έφκολο να βρύμε τον κινο διερέτι 100, χορις να τον αναλίςυμε ςε πρότυς διερέτες. Θα έχυμε:

$$1800 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \underline{100}, \quad 500 = 5 \cdot \underline{100}, \quad 700 = 7 \cdot \underline{100}.$$

Ο μέγιςτος κινος διερέτις τον αριθμον 1800, 500 κε 700 θα ίνε ο 100.

5. Ας πάρυμε τυς αριθμυς 75 κε 25· ι αριθμι αφτι έχυν κινυς διερέτες το 1, 5, 25.

Ο μέγιςτος κινος διερέτις θα ίνε ο αριθμος 25. Ετςι λιπον, ο μικρότερος απο τυς διο αφτυς αριθμυς ίνε μέγιςτος διερέτις τον διο αριθμον.

Ι. Αν ο μεγαλίτερος απο τυς διο δομένυς αριθμυς διερίτε δια τυ μικρότερυ, τότε αφτος ο μικρότερος ίνε ο μέγιςτος κινος διερέτις τον διο δομένον αριθμον.

ΙΙ. Αν ο μικρότερος αριθμος δεν θα ίνε ο μέγιςτος κινος διερέτις τον διο δομένον αριθμον, τότε αναλίοντας τυς αριθμυς ςε πρότυς παράγοντες κε διαλέγοντας ς' όλυς τυς δομένυς αριθμυς όλυς τυς κινυς παράγοντες, βρίςκυμε το μέγιςτο κινο διερέτι ςαν γινόμενο αφτον τον παραγόντον.

§ 11. Ενια για το ελάχιςτο πολαπλάςιο.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. 1. Ο αριθμος, ο οπίος διερίτε ακριβος δια τυ δομένυ αριθμυ, ονομάζετε πολαπλάςιο αφτυ τυ αριθμυ.

2. Στο ςχίμα 2 παριςτάνετε εφθία. Πάνο ςτιν εφθία μπορύμε να παραςτίςυμε αριθμυς. Γι' αφτο πρέπι να διαλέγυμε τι μονάδα τις κλίμακας. Ι μονάδα πάνο ςτιν εφθία αφτι αποδίδετε με 2 **μμ** μάκρος. Κςεχορίζοντας απ' το ςιμίο 0 τι μονάδα τις κλίμακας, ςιμιόνυμε το τέλος τις γραμις, πυ έχι μάκρος 2 **μμ**, με τον αριθμο 1. Το τέλος τις γραμις μάκρυς 4 **μμ** ςιμιόνυμε με τον αριθμο 2. Ετςι εχςακολυθύμε να ςιμιόνυμε κε θα έχυμε τα ςιμία με τυς αριθμυς 3, 4, 5, 6,... Μπορύμε πάνο ςτιν εφθία να ςιμιόςυμε όλυς τυς αριθμυς πυ μας χριάζοντε. Τέτια εφθία ονομάζετε: *α ρ ι θ μ ι τ ι κ ο ς ά χ ς ο ν α ς*.

Μεταξι τον αριθμον πάνο στον αριθμιτικο άξονα ιπάρχυν αριθμι πολαπλάσιι τυ 5. Αφτι ίνε: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40,... 60,...

Στον ίδιο άξονα ιπάρχυν ακόμα κε άλι αριθμι πολαπλάσιι τυ 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40,... 60,...

Τόρα ας διαλέξυμε απο τις διο αφτες σιρες εκίνυς τυς αριθμυς, πυ να ίνε σινάμα πολαπλάσιι τυ 5 κε τυ 4. Τέτιι αριθμι ίνε ο 20, 40, 60.

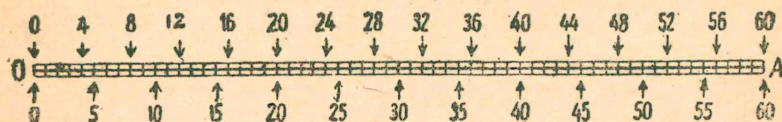
Βρίσκυμε τον μικρότερο απ' αφτυς. Αφτος θα ίνε ο αριθμος 20.

Αφτος, λιπον ο 20 ίνε το ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον 4 κε 5.

Ο ρ ι σ μ ο ς. Ο μικρότερος απ' όλυς τυς αριθμυς, ο οπίος διερίτε χορις κατάλιπο με όλυς τυς δομένυς αριθμυς, ονομάζετε ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον.

Το ελάχιστο πολαπλάσιο μπορύμε να το βρύμε κε έτσι:

3. Βρίσκυμε το ελάχιστο πολαπλάσιο τυ 4 κε 6. Αφτο πρέπι να διερίτε δια 4 κε 6. Ο αριθμος 4 έχι παράγοντες $2 \cdot 2$. Ο αριθμος 6 έχι παράγοντες 2 κε 3. Οστε κε ο αριθμος, το πολαπλάσιο τυ 4 κε 6, πρέπι να περιέχι παράγοντες διο φορες τον 2 κε μια φορα τον 3. Το ελάχιστο πολαπλάσιο, όπος φένετε, θα περιέχι μονάχα τυς παράγοντες $2 \cdot 2 \cdot 3$, πυ ισοδιναμι με 12.



Ιχ. 2.

§ 12. Τρις περιπτόσις τις έβρεσις τυ ελάχιστυ πολαπλάσιυ.

Μπορύμε να σιναντίσυμε τρις περιπτόσις τις έβρεσις τυ ελάχιστυ πολαπλάσιυ κάμποσον αριθμον.

I. Ο ένας απο τυς αριθμυς διερίτε δι' όλον τον άλον.

1. Πέρνυμε τυς αριθμυς 6, 5, 30. Να βρεθι το ελάχιστο πολαπλάσιο.

Λ ί σ ι. Το ελάχιστο πολαπλάσιό-τυς ίνε ο 30, γιατι ο 30 διερίτε δια 6, δια 5 κε δια 30.

Σ ι μ ί ο σ ι. Οταν θέλυμε να βρύμε το ελάχιστο πολαπλάσιο, πάντοτε πρέπι να δοκιμάσυμε, αν ο μεγαλίτερος απο τυς δομένυς αριθμυς διερίτε δι' όλον τον άλον. Αν ο μεγαλίτερος αριθμος διερίτε δι' όλον, τον άλον, τότε αφτος θα ίνε το ελάχιστο πολαπλάσιο όλον τον δομένον αριθμον.

II. Ολι ι δομένι αριθμι δεν έχυν κινυς παράγοντες.

2. Το ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον 2, 3 κε 5 ισύτε: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

3. Να βρεθι το ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον 3, 25, 14. Αναλίυμε, τυς αριθμυς σε πρότυς παράγοντες: $3 = 3$, $25 = 5 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$. Βλέπυμε πος ι δομένι αριθμι δεν έχυν πρότυς κινυς διερέτες, αν κε αναλίοντε σε απλυς διερέτες (παράγοντες). Φένετε λιπον, πος το ελάχιστο πολαπλάσιό-τυς θα ίνε τέτιος αριθμος, ο οπίος διερίτε δια όλον τον πρότον παραγόντον αφτον τον αριθμον. Τέτιος αριθμος ίνε το γινόμενο όλον τον δομένον αριθμον: $3 \cdot 25 \cdot 14 = 1050$.

III. Γενικι περίπτοσι.

4. Να βρεθι το ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον 40, 90, 75.

Λ ί σ ι. Αναλίυμε τυς αριθμυς αφτυς σε πρότυς παράγοντες:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5,\quad 90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$
$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2.$$

Για να βρύμε τόρα το ελάχιστο πολαπλάσιο, γράφυμε όλυς τυς παράγοντες τυ ενος αριθμυ (καλίτερα τυ μεγαλίτερυ) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, έπιτα τυς σιμπλιρόνυμε γράφοντας τυς παράγοντες τυ δέφτερυ αριθμυ (40), ι οπίι δεν ιπάρχυν στον πρότο διλ. $2 \cdot 2$ κε τελεφτέα στο γινόμενο αφτο γράφυμε τυς παράγοντες τυ τρίτυ αριθμυ (75), ι οπίι δεν ιπάρχυν στο γινόμενο αφτο, διλ. 5.

Το γινόμενο $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$ ίνε το πολαπλάσιο τον τριον αριθμον, γιατι αφτο περιέχι όλυς τυς παράγοντες (διερέτες) όλον τον δομένον αριθμον. Ο 1800 ίνε το ελάχιστο πολαπλάσιο, γιατι αν παραλίπσυμε έστο κε έναν παράγοντα, τότε το εβρισκόμενο δεν θα ίνε πολαπλάσιο, κε δεν θα διερεθι έστο κε με έναν απο τυς δομένυς αριθμυς.

Σ ι μ ί ο σ ι. Το ελάχιστο πολαπλάσιο δίο ίτε περισότερον αριθμον πρέπι να περιέχι όλυς τυς παράγοντες (διερέτες) αφτον τον αριθμον στιν ανότερι δίναμι.

Για να βρύμε το ελάχιςτο πολαπλάσιο ςτιν τελεφτέα περίπτοςι, δεν ίνε ανάνκι κάθε φορα να πολαπλασιάςυμε όλυς τυς παράγοντες, πυ ίβραμε. Αρκι μονάχα να πάρυμε τον μεγαλίτερο απο τυς αριθμυς τυ προβλίματος αφτυ κε να τον ςιμπλιρόςυμε με τυς παράγοντες, πυ περιέχοντε ςτο ελάχιςτο πολαπλάσιο αλα δεν μπένυν ς' αφτον τον αριθμο.

5. Να βρεθι το ελάχιςτο πολαπλάσιο τον αριθμον 360, 600, 720.

Λίςι. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Το ελάχιςτο πολαπλάσιο θάνε: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 720 \cdot 5 = 3600$. Για να βρύμε το ελάχιςτο πολαπλάσιο, πίραμε τον μεγαλίτερο αριθμο $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ κε τον πολαπλασιάςαμε επι 5, γιατι ο πολαπλαςιαςτις 5 ςτον μεγαλίτερο αριθμο τυ παραδίγματός-μας έχι μπι ςτιν πρότι δίναμι, κε ςτο πολαπλάσιο πρέπι να μπι ςτι δέφτερι δίναμι. Αλιότικα δεν θα διερεθι δια τυ αριθμυ 600. Γι' αφτο βρίκαμε το πολαπλάσιο, πολαπλασιάζοντας τον μεγαλίτερο αριθμο 720 με αφτον τον πολαπλασιαςτι 5, πυ δεν έφτανε.

§ 13. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια ςίνθετυ αριθμυ.

Ι ιδιότιτες τυ ελάχιςτυ πολαπλάςιυ, με τις οπίες γνοριςτίκαμε πια μας επιτρέπυν να τονίςυμε τιν ακόλυθι ιδιότιτα τις διέρεςις:

Αν ο αριθμος διερίτε δια κάμποςον αμιβέα πρότον αριθμον, τότε διερίτε κε με οπιοδίποτε γινόμενο, πυ βρίςκετε απο τιν ένοςι αφτον τον παραγόντον ςε ομάδες.

Αφτι ι ίδια ιδιότιτα μας επιτρέπι να μάθυμε, αν διερίτε ο διερετέος δια ςίνθετυ αριθμυ, τον οπίον μπορύμε να αναλίςυμε ςτυς 2, 4, 8, 3, 9, 5 κε ςτυς αριθμυς, πυ ίνε πολαπλάσιά-τυς, διλ. ςε τέτιυς αριθμυς, ςτυς οπίυς εμις εφαρμόζυμε τα προιγύμενα κε γνοςτα γνορίζματα τις διερετότιτας.

1. Ας βρύμε, αν διερύντε δια τυ 36 ι αριθμι 120, 180, 240, 360.

Λίςι. Αναλίυμε τον αριθμο 36 ςε διο αμιβέα πρότυς παράγοντες.

$$36 = 4 \cdot 9.$$

Σίμφονα με τα γνορίζματα τις διερετότιτας, βρίςκυμε πος δια τυ 4 διερύντε όλι ι δομένι αριθμι: 120, 180, 240, κε 360. Αλα δια τυ 9 διερύντε μονάχα ο 180 κε ο 360. Αφτο ςιμένι πος μονάχα το 180 κε 360 διερύντε ταφτόχρονα κε δια τυ 4 κε δια τυ 9, διλ. διερύντε δια $(4 \cdot 9) = 36$.

Σιμίοςι. Για τον καθοριζμο τις διερετότιτας πρέπι να αναλίςυμε το διερέτι ςε τέτιυς παράγοντες, πυ να ίνε αμιβέα πρότι.

2. Διερύντε άραγε ι αριθμι 30, 40, 60, 80 δια 12;

Λίςι. Αναλίυμε τον αριθμο 12 ςε διο αμιβέα πρότυς παράγοντες: $12 = 3 \cdot 4$. Μονάχα ένας αριθμος τυ παραδίγματος διερίτε κε δια τυ 3 κε δια 4. Αφτος ίνε ο αριθμος 60. Ι αριθμι 40 κε 80 διερύντε δια 4, αλα δεν διερύντε δια 3, ο αριθμος 30 δεν διερίτε δια 4. Θα ίτανε λάθος, αν αναλίαμε τον αριθμο 12 αλιότικα. Π.χ: ι ανάλιςι $12 = 2 \cdot 6$ δεν μας δίνι ςοςτι απάντιςι (2 κε 6 δεν ίνε αμιβέα πρότι αριθμι), επιδι, αν κε δια 6 κε 2 διερύντε ι αριθμι 30 κε 60, αλα το 30 δεν διερίτε δια 12.

3. Ας ιποδίξυμε τα γνορίζματα τις διερότιτας δια μερικον ςίνθετον αριθμον, πυ ςιχνα ςιναντύντε:

Δια 6 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 2 κε 3.
Δια 12 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 3 κε 4.
Δια 15 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 3 κε 5.
Δια 18 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 2 κε 9.

VII. ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΤΕΣ ΤΟΝ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

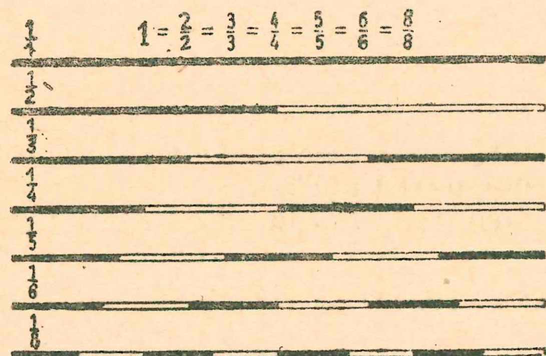
§ 1: Τα μέρι τις μονάδας. Κλαζματικι αριθμι.

Για τιν καταμέτριςι τυ μάκρυς μεταχιριζόμαςτε τι «μονάδα τυ μάκρυς». Ας τιν ονομάςυμε απλος μονάδα. Κατα τιν καταμέτριςι τυ μάκρυς μ' αφτι τι μονάδα μπορύμε να ςιναντίςυμε τέτια περίπτοςι, όςτε ι μονάδα να χορέςι ςτο μάκρος κάμποςες φορες κε ακόμα να μένι ένα κομάτι μικρότερο απο τι μονάδα τυ μάκρυς. Ετςι το μάκρος, πυ μετρίςαμε, δεν μπορύμε να το παραςτίςυμε με ακέρεο αριθμο κε γι' αφτο ίνε ανάνκι να ιςάγυμε νέυς αριθμυς — κλαζματικυς.

Ας ιποθέςυμε, πος έχυμε να μιράςυμε ένα κομάτι ςκινιυ εκςί–

ςυ ςε τρία άτομα. Κόβυμε το ςχινι ςε τρία ίςα μέρι. Απο το **μίραςμα** αφτο θάχυμε το ένα τρίτο όλυ τυ ςχινιυ. Για να μιράςυμε εχςίςυ 1 **χγ** ζάχαρι ςκόνις ςε τέςερα μερίδια πρέπι να διερέςυμε τι ζάχαρι ςε 4 ίςα μέρι. Κάθε μέρος θα αποτελέςι το ένα τέταρτο μέρος όλις τις ζάχαρις πυ έχυμε.

Κάθε ακέρεο αριθμο κε τι μονάδα μπορύμε να τα παρςτίςυμε ςαν ένα κομάτι εφθίας. Στο ςχ. 3 πίραμε μια εφθία, πυ παραδεχτίκαμε για μονάδα. Δίπλα ς' αφτι κε κάτο, πίραμε εφθίες, πυ ςχιματίςτικαν απο τι διέρεςι τις μονάδας ςε διο, τρία, τέςερα κε πέντε ίςα μέρι. Αφτα τα μέρι ονομάζοντε: ένα δέφτερο τις μονάδας, ίτε μιςο, ένα τρίτο τις μονάδας, ένα τέταρτο, ένα πέμτο τις μονάδας. Για τιν παράςταςι αφτον τον αριθμον ιςάγυν νέυς αριθμυς — **κλαζματικυς** αριθμυς, διότι ι ακέρει αριθμι χριςιμέβυν μονάχα για τιν παράςταςι ακέρεον μονάδον κε δεν πάνε για τιν παράςταςι τον μερον τις μονάδας.



Ιχ. 3.

Τυς κλαζματικυς αριθμυς, πυ ίβρανε τυς παρςτένυν ός εχςις: Το ένα δέφτερο: $\frac{1}{2}$, το ένα τρίτο: $\frac{1}{3}$, το ένα τέταρτο: $\frac{1}{4}$, το ένα πέμτο: $\frac{1}{5}$ κ.τ.λ.

Τα ίςα μέρι, ςτα οπία έχι διερεθι ι μονάδα, κάποτε τα ονομάζυν μερίδια τις μονάδας.

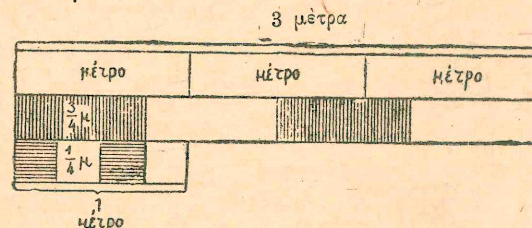
Τα μερίδια αφτα τις μονάδας παραςτένοντε με διο αριθμυς, πυ χορίζοντε με μια οριζόντια γραμι. Ο αριθμος, πυ βρίςκετε κάτο

απ' τι γραμι, δίχνι πάντοτε ςε πόςα ίςα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα, κε πάνο ςτι γραμι ςτέκετε ι μονάδα. Τον αριθμο, πυ αποτελίτε απο κάμποςα ίςα μέρι τις μονάδας, τον ονομάζυν επίςις κλαζματικο αριθμο. Π.χ. όταν μιράζυμε 1 **χγ** ζάχαρι (ςκόνι) ςε τέςερα ίςα μέρι κε πέρνυμε τρία τέτια μέρι, πάι να πι πέρνυμε τα τρία τέταρτα τυ όλυ ποςυ τις ζάχαρις, τα τρία τέταρτα το χιλιόγραμυ τις ζάχαρις ίνε τα τρία τέταρτα τις μονάδας. Ο αριθμος αφτος γράφετε έτςι: $\frac{3}{4}$, (τρία τέταρτα).

Οπος φένετε απο τι γραφι, το πςιφίο πάνο απ' τι γραμι δίχνι τον αριθμο τον μερον, πυ πίραμε. Το πςιφίο, πυ ίνε κάνο απ' τι γραμι, δίχνι ςε πόςα ίςα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα.

Αλα τον ίδιο αριθμο τρία τέταρτα μπορύμε να τον βρύμε κε διαφορετικα. Πέρνυμε ςπάνκο, ίτε ένα κομάτι ςχινι. Κόβυμε απ' αφτο ένα μέτρο κε ίςτερα κςανα τρία μέτρα. Το μεγαλίτερο κομάτι τυ ςχινιυ το διερύμε ςε τέςερα μέρι. Διερύμε τα τρία μέτρα ςε τέςερα μέρι. Το κομάτι, πυ βρίςκυμε, θάχι μάκρος 75 ςαντίμετρα. Τόρα πέρνυμε το μικρότερο κομάτι, πυ έχι μάκρος ένα μέτρο κε διερόντας-το ςε 4 μέρι, πέρνυμε τρία τέτια μέρι. Καθένα απ' αφτα θάνε 25 **ςμ.** Τα τρία μέρι έχυν μάκρος 75 **ςμ.** Το κομάτι, πυ έχι τέτιο μάκρος, θα αποτελέςι τα $\frac{3}{4}$ τυ μέτρυ.

Μιράζοντας τα 3 μέτρα ςε 4 μέρι κε πέρνοντας τα $\frac{3}{4}$ απ' τὄνα μέτρο, θάχυμε όμια εχςαγόμενα. Μπορύμε να γράπςυμε $3:4=\frac{3}{4}$. Το εχςαγόμενό-μας ίνε κλαζματικος αρίθμος. Ο κλαζματικος αφτος αριθμος $\frac{3}{4}$ θάνε εχςαγόμενο τις διέρεςις τυ ακέρευ αριθμυ 3 δια τυ ακέρευ αριθμυ 4 (ιχ. 4). Στι γραφι 'αφτι το 4 δίχνι, ςε πόςα ίςια μερίδια μιράςτικε ι μονάδα. Το 3 δίχνι πόςα τέτια μερίδια πάρθικαν.



Ιχ. 4.

Κατ' αφτον τον τρόπο μπορύμε να βρύμε τα $\frac{3}{4}$ **χγ** πςιλις ζάχαρις, διερόντας τα 3 **χγ** τις ζάχαρις ςε τέςερα μέρι.

Διερύμε πρότα ένα χιλιόγραμο ςε τέςερα μέρι, βρίςκυμε $\frac{1}{4}$ **χγ**. Κατόπιν διερύμε το δέφτερο κε τρίτο χιλιόγραμο κε κάθε φορα πέρνυμε $\frac{1}{4}$ **χγ**. Ος αποτέλεζμα τις διέρεςις αφτις, πυ κάναμε τρις φορες, θάχυμε τρις φορες απο $\frac{1}{4}$ χιλιόγραμυ. Το όλο θάχυμε τέςερα μέρι προς $\frac{3}{4}$ **χγ** το καθένα.

Προτυ να γνοριςτύμε με τυς κλαζματικύς αριθμυς, δεν μπορύςαμε να κάνυμε οπιαδίποτε διέρεςι· μπορύςαμε να διερέςυμε μόναχα μεγαλίτερο αριθμο δια μικροτέρυ. Πραγματικα, ακέρεο πιλίκο μπορύμε να βρύμε μονάχα τότε, όταν διερέςυμε μεγαλίτερο αριθμο δια μικρότερυ, ίτε όταν διερέςυμε ίςυς αριθμυς. Μα όταν ιςάχθικαν ι κλαζματικι αριθμι, έγινε δινατι κάθε διέρεςι, ακόμα κε διέρεςι μικρότερυ αριθμυ δια μεγαλίτερυ. Το εκςαγόμενο τις διέρεςις θάνε κλαζματικος αριθμος. Ετςι ο κλαζματικος αριθμος ίνε εκςαγόμενο τις διέρεςις διο ακέρεον αριθμον. Γι' αφτο τυς κλαζματικυς αριθμυς τυς ςιμιόνυν με δίο πςιφία, ανάμεςα ςτα οπία φέρυν οριζόντια γραμι — ςιμίο διέρεςις.

Ο αριθμος, πυ βρίςκετε πάνο απ' τι γραμι, ονομάζετε *α ρ ι θ μ ι τ ι ς* τυ κλάζματος· ο αριθμος, πυ βρίςκετε κάτο απ' τι γραμι, ονομάζετε *π α ρ ο ν ο μ α ς τ ι ς* τυ κλάζματος.

Ο ρ ι ζ μ ι. I. Παρονομαςτις κλαζματικυ αριθμυ ονομάζετε ο ακέρεος αριθμος, πυ δίχνι ςε πόςα ίςα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα.

II. Αριθμιτις κλαζματικυ αριθμυ ονομάζετε ο ακέρεος αριθμος, πυ δίχνι πόςα μέρι τις μονάδας περιέχι το κλάζμα.

Τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυς χορίζυν με γραμι. Κατα τιν απανκελία πρότα απανκέλυν τον αριθμιτι, έπιτα τον παρονομαςτι τυ κλάζματος.

Σ ι μ ί ο ς ι. Τον κλαζματικο αριθμο ςίντομα τον λένε „κλάζμα".

Επιδι το κλάζμα ίνε εκςαγόμενο τις διέρεςις, μπορύμε να ονομάςυμε αφτο κε τα ςιςτατικα μέρι-τυ με διο τρόπυς:

1) πιλίκο $\frac{4}{5}$ διερετέος / διερέτις, 2) κλάζμα: $\frac{4}{5}$ αριθμιτις / παρονομαςτις.

§ 2. Το κλάζμα ίνε λόγος δίο αριθμον.

1. Ι μια μπριγάδα τυ κολχοζιυ έςπιρε 75 εχτάρια. Ι άλι μπριγάδα έςπιρε 150 εχτάρια. Πρέπι να ςινκρίνυμε, πιά μπριγάδα έκανε περιςότερι δυλια κε κατα πόςες φορες.

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα αφτο λίνετε με τι διέρεςι.

$150 : 75 = \frac{150}{75} = 2$. Ι δέφτερι μπριγάδα έκανε 2 φορες περιςότερι δυλια.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Το αποτέλεζμα τις ςίνκριςις διο αριθμον μέςον τις διέρεςις ονομάζετε λόγος διο αριθμον.

Ο διερετέος ονομάζετε ιγύμενος όρος τυ λόγυ, ο διερέτις επόμενος όρος τυ λόγυ.

Στο πρόβλιμα αφτο ο λόγος θα ίνε $\frac{150}{75} = 2$. Ιγύμενος όρος ίνε το 150, επόμενος όρος ίνε το 75.

2. Ενα κολχόζι έχι 851 **εχτ.** καλιεργίςιμις γις. Σίμφονα με το πλάνο 320 **εχτ.** θα καλιεργίςυν ι μπριγάδες, πυ έχυν ςτι διάθεςί-τυς μιχανες με άλογα κε το ιπόλιπο θα καλιεργιθι με τράχτορα. Πόςο μέρος όλις τις εργαςίας θα κάνυν ι πρότες μπριγάδες;

Εδο πρέπι να ςινκρίνυμε μέςον τις διέρεςις τιν εργαςία τον μπριγάδον, πυ εργάζοντε με άλογα, με κίνι τιν εργαςία, τιν οπία πρέπι να κάνυνε ς' όλο το κολχόζι:

$$320 : 851 = \frac{320}{851}.$$

Στο παράδιγμα αφτο τον λόγο δεν μπορύμε να τον παραςτίςυμε με ακέρεο αριθμο κε γι' αφτο βρίςκυμε κλαζματικο αριθμο: $\frac{320}{851}$, πυ δίχνι, πόςο μέρος όλις τις εργαςίας θα κάνυν ι μπριγάδες, πυ εργάζοντε με άλογα.

Το κλάζμα αφτο μπορύμε να το ονομάςυμε λόγο, αλα μπορύμε να το ονομάςυμε κε πιλίκο, πυ έχι προκίπςι απ' τι διέρεςι. Ενας κε ο αφτος αριθμος $\frac{320}{851}$ θα έχι τις ακόλυθες ονομαςίες:

1) πιλίκο: $\frac{320}{851}$ διερετέος / διερέτις

2) λόγος: $\frac{320}{851}$ ιγόμενος όρος τυ λόγυ / επόμενος όρος τυ λόγυ

3) κλάζμα: $\frac{320}{851}$ αριθμιτις / παρονομαστις.

Τα σιμία $<$ κε $>$ χρισιμέβυν για να παραστίσυν, πος ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος ίτε μικρότερος απο έναν άλον.

$$\frac{1}{2} < 1$$

διαβάζετε έτσι: το ένα δέφτερο ίνε μικρότερο τις μονάδας.

$$1 > \frac{1}{3}$$

διαβάζετε έτσι: ι μονάδα ίνε μεγαλίτερι τυ ενος τρίτυ.

Το σιμίο $<$ έχι στραμένι τιν εχμι προς το μικρότερο αριθμο.

§ 3. Κλάζματα κίρια κε καταχριστικα. Μιχτος αριθμος.

1. Πάνο στο σχίμα 3 (σελ. 76) ι μονάδα κε τα μέρι-τις έχυν παραστιθι σαν τμίματα εφθίας. Κάθε μέρος ίνε μικρότερο τις μονάδας. Μπορύμε λιπον να γράπσυμε:

$$\frac{1}{2} < 1, \quad \frac{1}{3} < 1, \quad \frac{1}{4} < 1, \quad \frac{1}{5} < 1.$$

Τα κλάζματα, πυ παραστένυν ένα οπιοδίποτε μέρος τυ ακέρευ, ίνε μικρότερα τις μονάδας.

Επίσις θα ίνε μικρότερι τις μονάδας κε τέτιι αριθμι:

$$\frac{2}{5} < 1, \quad \frac{3}{5} < 1, \quad \frac{4}{5} < 1.$$

Το κλάζμα (αν παραστένι κάμποσα μέρι τις μονάδας) θα ίνε μικρότερο τις μονάδας στιν περίπτοσι εκίνι, όταν ο αριθμος τον μερον, πυ πίραμε, ίνε μικρότερος τυ αριθμυ, πυ δίχνι σε πόσα ίσα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα.

Τα κλάζματα, πυ ίνε μικρότερα τις μονάδας, ονομάζοντε κ ί ρ ι α κλάζματα. Στα κίρια κλάζματα ο αριθμιτις ίνε πάντοτε μικρότερος τυ παρονομαστι.

2. Σινκρίνοντας τα μέρι τις μονάδας κε τιν ακέρεα μονάδα (σχιμ. 3) μπορύμε επίσις να πύμε, πος

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5}.$$

Το κλάζμα ισύτε με τιν μονάδα σε κίνιν τιν περίπτοσι, όταν ο αριθμος τον μερον, πυ πίραμε, κε ο αριθμος τον μερον, στα οπία έχι διερεθι ι μονάδα, ίνε ίσα. Σ' αφτι τιν περίπτοσι ο αριθμιτις τυ κλάζματος πάντοτε ισύτε με τον παρονομαστι. Τέτιο κλάζμα ονομάζετε κ α τ α χ ρ ι σ τ ι κ ο κλάζμα.

3. Μένι να εχσετάσυμε τιν περίπτοσι, όταν ο αριθμος τον μερον, πυ πίραμε, θα ίνε μεγαλίτερος τυ αριθμυ τον μερον, στα οπία έχι διερεθι ι μονάδα.

$$\frac{6}{5} > 1, \quad \frac{8}{5} > 1, \quad \frac{23}{5} > 1.$$

Ολι αφτι ι αριθμι ίνε μεγαλίτερι τις μονάδας. Επιδι όμος αφτι αποτελύντε απο μέρι τις μονάδας, γι' αφτο κε θα ίνε κλαζματικι αριθμι. Αφτυς επίσις τυς ονομάζυν κλάζματα κ α τ α χ ρ ι σ τ ι κ α. Στα καταχριστικα κλάζματα αφτυ τυ ίδυς ο αριθμιτις ίνε μεγαλίτερος τυ παρονομαστι.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Κίριο ονομάζετε το κλάζμα, όταν ίνε μικρότερο τις μονάδας. Καταχριστικο ονομάζετε το κλάζμα, όταν ισύτε με τι μονάδα, ίτε ίνε μεγαλίτερο τις μονάδας.

Βλέπυμε, πος αν το κλάζμα ίνε:

1) μικρότερο τις μονάδας, τότε ο αριθμιτίς-τυ ίνε μικρότερος τυ παρονομαστι,

2) μεγαλίτερο τις μονάδας, τότε ο αριθμιτίς-τυ ίνε μεγαλίτερος τυ παρονομαστι,

3) ίσο με τι μονάδα, τότε ο αριθμιτίς-τυ ισύτε με τον παρονομαστι.

Μεταχσι τον κλαζμάτον: $\frac{3}{5}, \frac{8}{11}, \frac{42}{15}, \frac{26}{10}, \frac{5}{13}, \frac{36}{30}, \frac{17}{17}$

καταχριστικα ίνε: $\frac{42}{15}, \frac{26}{10}, \frac{36}{30}, \frac{17}{17},$

κίρια ίνε: $\frac{3}{5}, \frac{8}{11}, \frac{5}{13}.$

4. Ιπάρχι ακόμι κε ένα άλο ίδος αριθμυ. Ο αριθμος αφτος αποτελίτε απο ακέρεο κε απο κλαζματικο. Τέτιος αριθμος ονομάζετε μ ι χ τ ο ς αριθμος. Το κλαζματικο μέρος τυ μιχτυ αριθμυ ςινίθος έχι μορφι κίριυ κλάζματος.

Τυς μιχτυς αριθμυς τυς γράφυν ςιντομεβμένα:

$$1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2},\quad 3+\frac{5}{7}=3\frac{5}{7},\quad 8+\frac{3}{4}=8\frac{3}{4}.$$

Κατα τι γραφι το ςιμίο τις πρόςθεςις παραλίπετε.

Ι αριθμι: $1\frac{1}{2}$, $3\frac{5}{7}$, $8\frac{3}{4}$ ίνε μιχτι αριθμι.

§ 4. Τροπι ακέρευ κε μιχτυ αριθμυ ςε καταχριςτικο κλάζμα.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Ο αριθμος, πυ παραςτένι άθριζμα ακέρευ κε κλαζματικυ αριθμυ, ονομάζετε μιχτος.

1. Οταν διερύμε τιν εφθία, πυ παραδεχτίκαμε ος μονάδα, ςε 2, 4 κε 8 ίςα μέρι, μπορύμε να γράψυμε, πος κάθε μέρος ιςύτε με $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Απο τι μονάδα πέρνυμε δίο δέφτερα, τέςερα τέταρτα κε οχτο όγδοα:

$$1=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}.$$

Ινε έφκολο να βρύμε, πόςα δέφτερα, τέταρτα, όγδοα μερίδια περιέχυν δίο μονάδες, τρις μονάδες...:

$$2=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8},\qquad 3=\frac{6}{2}=\frac{12}{4}=\frac{24}{8}.$$

Ολα αφτα τα κλάζματα θα ίνε καταχριςτικα κλάζματα.

2. Να τραπυν ςε δέκατα πέμπτα κε ικοςτα ι ακέρει αριθμι: 5, 10, 8.

Λ ί ς ι. $5=\frac{75}{15}=\frac{100}{20}$, $10=\frac{150}{15}=\frac{200}{20}$, $8=\frac{120}{15}=\frac{160}{20}$.

3. Με τον ίδιο τρόπο παραςτένυν ος κλάζματα κε οπιυςδίποτε ακέρευς αριθμυς. Ος παρονομαςτι μπορύμε να πάρυμε όπιο αριθμο θέλυμε. Π. χ: $11=\frac{33}{3}=\frac{44}{4}$; $6=\frac{12}{2}=\frac{24}{4}$.

4. Κςέροντας να τρέψυμε ακέρεο αριθμο ςε καταχριςτικο κλάζμα, μπορύμε να τρέψυμε ςε καταχριςτικο κλάζμα κε μιχτο αριθμο.

Να τραπυν ςε καταχριςτικα κλάζματα ι μιχτι αριθμι:

1) $2\frac{3}{4}$, 2) $5\frac{7}{8}$, 3) $2\frac{3}{5}$.

Λ ί ς ι. 1) $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, γιατι ι μονάδα περιέχι τέςερα τέταρτα, ι δίο μονάδες περιέχυν $(4\cdot 2)$ οχτο τέταρτα· αν προςθέςυμε τρία τέταρτα, τότε το όλο θε γίνυν έντεκα τέταρτα: $2\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}$, $\frac{8}{4}$ κε $\frac{3}{4}$ αποτελυν $\frac{11}{4}$.

2) $5\frac{7}{8}=\frac{47}{8}$, 3) $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$.

Για να τρέψυμε μιχτο αριθμο ςε καταχριςτικο κλάζμα, πρέπι τον παρονομαςτι τυ κλάζματος τυ μιχτυ αριθμυ να τον πολαπλαςιάςυμε επι τον ακέρεο αριθμο κε να προςθέςυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος. Αφτο θα δόςι τον αριθμιτι τυ εκςαγομένυ. Ο παρονομαςτις μένι ο ίδιος.

§ 5. Εκςαγογι τυ ακέρευ μέρυς απο το καταχριςτικο κλάζμα.

Ι τροπι τυ ακέρευ αριθμυ με κλάζμα ςε καταχριςτικο κλάζμα γίνετε με τι βοίθια τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις πρόςθεςις.

Ι διέρεςι, κατα τιν οπία βρίςκυμε ςτο πιλίκο μιχτο αριθμο, μας επιτρέπι να λίςυμε αντίθετο πρόβλιμα: να εκςάγυμε τον ακέρεο αριθμο απο το καταχριςτικο κλάζμα.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Να εκςάγυμε το ακέρεο μέρος απο το κλάζμα ςιμένι να μάθυμε, πόςες ακέρεες μονάδες περιέχι το καταχριςτικο κλάζμα.

Να εκςάγυμε το ακέρεο μέρος τυ κλάζματος $\frac{33}{8}$.

Λ ί ς ι. Επιδι ο $\frac{8}{8}$ αποτελι τι μονάδα, ο $\frac{33}{8}$ θα περιέχι τόςες μονάδες, όςες φορες το 33 περιέχι το 8. Διερύμε. Αν θα διερέ-

ςυμε τον 33 δια τυ 8 ςίμφονα με το κανόνα τις διέρεςις τον ακέρεο αριθμον, τότε θα βρύμε ακέρεο πιλίκο 4 κε ακόμα κατάλιπο:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 8 \\ \underline{32} & 4 \\ 1 & \end{array}$$

Διερόντας το κατάλιπο 1 δια τυ 8, θα έχυμε $\frac{1}{8}$.

Επομένος: $\frac{33}{8} = 4 + \frac{1}{8} = 4\frac{1}{8}$.

Για να εκςάγυμε τον ακέρεο αριθμο απο το κλάζμα, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος δια τυ παρονομαςτί-τυ· το πιλίκο, πυ βρίςκυμε, δίνι το ακέρεο μέρος τυ μιχτυ αριθμυ, κε το κατάλιπο θα ίνε ο αριθμιτις τυ κλαζματικυ μέρυς τυ αριθμυ. Ο διερέτις θα ίνε ο παρονομαςτις τυ κλαζματικυ μέρυς.

§ 6. Σίνκριςι τυ μεγέθυς τον κλαζμάτον, πυ έχυν τυς ίδυς παρονομαςτες ίτε τυς ίδιυς αριθμιτες.

Ος τόρα μάθαμε να ςινκρίνυμε τα κλάζματα με τι μονάδα, αλα μπορύμε να ςινκρίνυμε τα κλάζματα κε αναμεταχςί-τυς.

I. Κλάζματα με ίδιυς αριθμιτες.

1. Ας πάρυμε τενία — μέτρο κε ας τιν διερέςυμε ςε 2, 4, 5, 10, 50 μέρι. Ορίζοντας πόςα μιλίμετρα περιέχυν τα μέρι: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$ **μ**, κε ςινκρίνοντας το μάκρος αφτον τον μερον, μπορύμε να ςινκρίνυμε τυς κλαζματικυς αριθμυς, πυ παραςτένυν αφτα τα μέρι.

Ας βάλυμε τα κλάζματα ςτι ςιρα κατα το μέγεθός-τυς.

Θα έχυμε τι ςιρα: $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$.

Βλέπυμε, πος όςο μεγαλόνι ο αριθμος τον μερον, ςτα οπία έχι διερεθι ι μονάδα, τόςο ελατόνετε το μέρος, πυ βρίςκυμε ςτι διέρεςι, κε επομένος κε ο αριθμος, πυ παραςτένι αφτο το μέρος. Ας ςινκρίνυμε τυς ακέρευς αριθμυς: 20, 17, 13, 11, 10.

9, 8, 3, 2 κε τα κλάζματα: $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Βρίςκυμε τέτιες ανιςότιτες, πυ ςιμιόνυμε τιν ςινκριτικί-τυς αχςία:

$$20 > 17 > 13 > 11 > 10 > 9 > 8 > 3 > 2,$$

$$\frac{1}{20} < \frac{1}{17} < \frac{1}{13} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10} < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

Ι αριθμι τις πρότις ςιρας δίχνυν τον αριθμο τον μερον τις μονάδας. Ι αριθμι τις δέφτερις ςιρας δίχνυν, με τί ιςύτε κάθε μέρος.

Αν διερέςυμε τιν μονάδα ςε μέρι, τότε το μέγεθος κάθε μέρυς ίνε τόςο μικρότερο όςο μεγαλίτερος ίνε ο αριθμος τον μερον, ςτα οπία έχι διερεθι ι μονάδα.

Ο κανόνας αφτος μας επιτρέπι να ςινκρίνυμε τα κλάζματα, τον οπίον ο αριθμιτις ιςύτε με τι μονάδα.

Κςέροντας να ςινκρίνυμε τέτια κλάζματα, έφκολα μπορύμε να πάμε ςτι ςίνκριςι πιο ςίνθετον κλαζμάτον.

2. Να ςινκριθι το μέγεθος τον κλαζμάτον:

α) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, β) $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{7}$, γ) $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$.

Σ' όλα τα παραδίγματα ο αριθμιτις όλον τον κλαζμάτον ίνε ο ίδιος. Τα κλάζματα ίνε βαλμένα ος προς το μέγεθός-τυς ςε κατιύςα ςιρα. Απ' τα κλάζματα, πυ έχυν τυς ίδιυς αριθμιτες, μεγαλίτερο ίνε εκίνο, ο παρονομαςτίς τυ οπίυ ίνε μικρότερος. Ινε ςοςτος κε ο ακόλυθος κανόνας:

Οταν αφκςένυμε τον παρονομαςτι χορις ν' αλάκςυμε τον αριθμιτι το μέγεθος τυ κλάζματος ελατόνετε.

II. Ομόνιμα κλάζματα. 3. Να ςινκρίνετε τα μεγέθι τον ακόλυθον κλαζμάτον: $\frac{1}{3}$ κε $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{5}$ κε $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$ κε $\frac{4}{7}$.

Λίςι. $\frac{4}{3} > \frac{1}{3}$, $\frac{4}{5} > \frac{1}{5}$, $\frac{4}{7} > \frac{1}{7}$.

4. Να ςινκριθυν τα κλάζματα: $\frac{1}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{27}{11}$, $\frac{30}{11}$.

Απο τα ομόνιμα κλάζματα το μεγαλίτερο ίνε κίνο, πυ έχι τον μεγαλίτερο αριθμιτι, επιδι με τιν άφκςισι τυ αριθμιτι μεγαλόνι κε ο αριθμος τον μερον, γι' αφτο:

$$\frac{30}{11}>\frac{27}{11}>\frac{8}{11}>\frac{5}{11}>\frac{1}{11}.$$

Οταν μεγαλόνυμε τον αριθμιτι χορις να αλάκςυμε τον παρονομαςτι, το κλάζμα μεγαλόνι.

§ 7. Πός αλάζι το κλάζμα, όταν αλάζυμε τον αριθμιτι κε παρονομαςτί-τυ.

1. Αν πάρυμε ένα μέτρο, πυ να το παραδεχτύμε για μονάδα, κε το διερέςυμε ςε 20 μέρι, τότε θα έχυμε ένα κομάτι, πυ θα αποτελι το $\frac{1}{20}$ μέρος όλις τις μονάδας.

Αν πάρυμε πέντε τέτια μέρι, τότε θα έχυμε $\frac{5}{20}$. Ο αριθμιτις τυ κλάζματος $\frac{5}{20}$ ίνε πέντε φορες μεγαλίτερος απο τον αριθμιτι τυ κλάζματος $\frac{1}{20}$.

Απο δο φένετε, πος κε το κλάζμα $\frac{5}{20}$ ίνε πέντε φορες μεγαλίτερο απο το $\frac{1}{20}$. Αφτο μπορύμε να το εκςελένκςυμε με τιν καταμέτριςι.

Ετςι μπορύμε με το $\frac{1}{5}$ τις μονάδας να ςχιματίςυμε τυς αριθμυς $\frac{3}{5}$ κε $\frac{6}{5}$. Αφτα θα ίνε γραμες μάκρος $\frac{3}{5}$ **μ** κε $\frac{6}{5}$ **μ**. Σινκρίνοντας το μάκρος $\frac{6}{5}$ κε $\frac{3}{5}$, βλέπυμε, πος το $\frac{6}{5}$ ίνε διο φορες μεγαλίτερο απο το $\frac{3}{5}$. Ο αριθμιτις τυ κλάζματος $\frac{6}{5}$ ίνε μεγαλίτερος απο τον αριθμιτι τυ κλάζματος $\frac{3}{5}$ κατα 2 φορες, κε ο ίδιος αριθμος $\frac{6}{5}$ ίνε μεγαλίτερος τυ αριθμυ $\frac{3}{5}$ κατα 2 φορες.

Ας πάρυμε μια ςιρα κλαζμάτον: $\frac{2}{25}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{14}{25}$, ας ςινκρίνυμε τα ακολυθύντα κλάζματα με το πρότο κλάζμα τις ςιρας. Θα δύμε, πος ο αριθμιτις καθενος ακολυθύντος κλάζματος ίνε μεγα-

λίτερος απο τον αριθμιτι τυ πρότυ κλάζματος 3, 4, 5, κε 7 φορες. Κε ακριβος τόςες φορες το μέγεθος τυ καθενος κλάζματος ίνε μεγαλίτερο απο το μέγεθος τυ πρότυ κλάζματος.

Για να βρύμε το καθένα απο τα ακολυθύντα κλάζματα, πρέπι τον αριθμιτι τυ πρότυ κλάζματος να τον αφκςίςυμε 3, 4, 5 κε 7 φορες.

I. Για να αφκςίςυμε ένα κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι τόςες φορες να αφκςίςυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος, χορις ν' αλάκςυμε τον παρονομαςτι.

Μπορύμε να δοκιμάςυμε το ςιμπέραζμα ςίμφονα με τις ιδιότιτες τυ πιλίκυ, πέρνοντας για διερετέο τον αριθμιτι κε για διερέτι τον παρονομαςτι.

Να ελατοθυν τα κλάζματα: $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{5}{8}$ κατα 5 φορες.

Ο αριθμιτις τον κλαζματικον αφτον αριθμον διερίτε δια 5. Ελατόνοντας τυς αριθμιτες 5 φορες θα έχυμε: $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{8}$.

Καθένας απ' αφτυς τυς αριθμυς ίνε 5 φορες μικρότερος απο τον αντίςτιχό-τυ αριθμο τυ παραδίγματος.

II. Για να ελατόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι να ελατόςυμε αν ίνε δινατο, τον αριθμιτί-τυ τόςες φορες.

3. Ας δίκςυμε τόρα, πός μπορύμε να ελατόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες με άλο τρόπο.

Σινκρίνοντας τα κλάζματα $\frac{1}{4}$ κε $\frac{1}{8}$, μπορύμε να πύμε, πος το δέφτερο κλάζμα ίνε μικρότερο τυ πρότυ 2 φορες, επιδι ο αριθμος τον μεριδίον, ςτα οπία έχι διερεθι ι μονάδα τυ δέφτερυ κλάζματος, ίνε διο φορες μεγαλίτερος· όςτε κάθε μερίδιο ίνε διο φορες μικρότερο. Ο παρονομαςτις τυ μικρότερυ κλάζματος ίνε 2 φορες μεγαλίτερος τυ παρονομαςτι τυ μεγαλίτερυ κλάζματος.

Με τον ίδιο τρόπο ςιμπερένυμε, πος ο $\frac{3}{8}$ ίνε διο φορες μικρότερος απο τον $\frac{3}{4}$. Κε εδο ο παρονομαςτις τυ κλάζματος $\frac{3}{8}$ ίνε διπλάςιος τυ παρονομαςτι τυ κλάζματος $\frac{3}{4}$. Τι δοκιμι τις ορθότι-

τας τις πράχσις αφτις ίνε έφχολο να τιν κάνυμε με τι βοίθια τυ μέτρυ (τενίας) πέρνοντας το μέτρο ός μονάδα.

Αν θα ςινκρίνυμε τα κλάζματα: $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{20}$, επίςις θα δύμε πος ι ελάτοςι τυ κλάζματος κατα 2 φορες ςινοδέβετε με τιν άφχςιςι τυ παρονομαςτί-τυ κατα 2 φορες. Κατα τιν ελάτοςι τυ κλάζματος κατα 4 φορες, αφχςένι 4 φορες κε ο παρονομαςτις. Τιν ιδιότιτα αφτι τον κλαζματικον αριθμον μπορύμε να τιν διατιπόςυμε ος εχςις:

III. Για να ελατόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι να μεγαλόςυμε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος τόςες φορες.

Μπορύμε να αφχςίςυμε το κλάζμα, ελατόνοντας τον παρονομαςτί-τυ.

4. Ας αφχςίςυμε τα κλάζματα: α) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, κατα 3 φορες, β) $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$ κατα 5 φορες.

Λ ί ς ι. α) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, β) $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$.

IV. Για να αφχςίςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι να ελατόςυμε, αν ίνε δινατον, τον παρονομαςτί-τυ τόςες φορες.

§ 8. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος.

Πέρνυμε μέτρο διερεμένο ςε ςαντίμετρα. Το παραδεχόμαςτε ςαν μονάδα κε χορίζυμε πρότα $\frac{2}{5}$ αφτις τις μονάδας κε επιτα $\frac{20}{50}$ κε ςινκρίνυμε τα εβριςκόμενα κομάτια· θα δύμε, πος αφτα τα κομάτια ίνε ίςα. Οςτε θα ίνε ίςι κε ι αντίςτιχι αριθμι:

$$\frac{2}{5}=\frac{20}{50}.$$

Τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ δέφτερυ κλάζματος μπορύμε να τυς βρύμε με τον πολαπλαςιαζμο τυ αριθμιτι κε τυ παρονομαςτι τυ πρότυ κλάζματος επι 10.

Ετςι θα ίνε ίςι κε ι κλαζματικι αριθμι:

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{8}{20}=\frac{20}{50}=\frac{40}{100},$$

ίτε κατ' αντίθετι ςιρα:

$$\frac{40}{100}=\frac{20}{50}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Σινκρίνοντας τυς αριθμιτες τον κλαζμάτον αφτον, βλέπυμε, πος ο αριθμιτις κάθε ακολυθύντος κλάζματος βρίςκετε απο τον αριθμιτι τυ προιγύμενυ κλάζματος με τον πολαπλαςιαζμο ίτε τιν διέρεςι με ένα κε τον ίδιο αριθμο. Το ίδιο μπορύμε να πύμε κε για τον παρονομαςτι αφτον τον κλαζμάτον.

Αν θα εχςακολυθίςυμε μια ςιρα ιςοτίτον:

$$1)\ \frac{7}{20}=\frac{21}{60}=\frac{28}{80},\quad 2)\ \frac{8000}{24000}=\frac{4000}{12000}=\frac{500}{1500}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},$$

έφχολα θα καταλάβυμε, πος ςτιν πρότι ςιρα ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις αφχςένυν κατα 3, 4,... φορες, ςτι δέφτερι ςιρα ελατόνοντε 2, 8, 100,... φορες. Στα παραδίγματα αφτα το μέγεθος τυ κλάζματος δεν αλάζι απ' τον πολαπλαςιαζμο ίτε τι διέρεςι τυ αριθμιτι κε τυ παρονομαςτι με ένα κε τον ίδιο αριθμο.

Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος. Ι τιμι τυ κλάζματος δεν αλάζι, αν τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος τυς πολαπλαςιάςυμε ί τυς διερέςυμε με ένα κε τον ίδιο αριθμο.

Ας γράπςυμε τιν ιδιότιτα αφτι με γράματα:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},\quad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}.$$

Τιν κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος μπορύμε να τιν εχςιγίςυμε κι αλιότικα.

Ας πάρυμε ένα οπιοδίποτε κλάζμα: π. χ. $\frac{20}{30}$. Ας πολαπλαςιάςυμε τον αριθμιτί-τυ επι 5. Το κλάζμα θα μεγαλόςι 5 φορες. Ας πολαπλαςιάςυμε τόρα τον παρονομαςτι τυ κλάζματος πυ βρίκαμε επι 5. Το κλάζμα θα ελατοθι 5 φορες. Οςες φορες μεγάλοςε το κλάζμα, όταν πολαπλαςιάςαμε τον αριθμιτί-τυ επι 5, τόςες φορες ελατόθικε όταν πολαπλαςιάςαμε τον παρονομαςτί-τυ επι 5, το μέγεθος τυ κλαζματικυ αριθμυ απ' αφτο δεν άλαχςε.

Το ίδιο θα ςιμβι, αν κε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτί-τυ θα τυς διερέςυμε με ένα κε τον ίδιο αριθμο. Ας διερέςυμε τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος $\frac{20}{35}$ δια 5. Διερόντας τον αριθμιτι ελατόςαμε το κλάζμα 5 φορες, διερόντας τον παρονομαςτι αφχςίςαμε το κλάζμα 5 φορες. Κε τελεφτέα το μέγεθος τυ κλάζματος απ' αφτο δεν άλαχςε:

$$\frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

§ 9. Απλοπίιςι τυ κλάζματος.

1. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος μας επιτρέπι να κάνυμε τιν απλοπίιςι.

Ο ρ ι ς μ ο ς. Να απλοπιίςυμε ένα κλάζμα ςιμένι να το παραςτίςυμε χορις ν' αλάκςυμε τιν τιμί-τυ με μορφι κλάζματος, πυ έχι μικρότερο αριθμιτι κε παρονομαςτι.

Π.χ. $\frac{3600}{8400} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7}.$

Το μέγεθος τυ κλάζματος δεν άλαχςε, όταν περνόντας απο το πρότο κλάζμα ςτο τρίτο, διερέςαμε δια τυ αφτυ αριθμυ τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος. Δηλαδι: διερέςαμε τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος πρότα δια 100 κε ίςτερα δια 12.

Για να απλοπιίςυμε ένα κλάζμα, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος δια τον κινον διερετόν-τυς, οςότυ ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτίς-τυ να καταντίςυν αμιβέα πρότι αριθμι.

2. Να παρασταθυν τα ακόλυθα πιλίκα με μορφι απλον κλαζμάτον: 50 : 70, 20 : 25, 400 : 900, 5000 : 8000 κε να απλοπιιθυν.

Λ ί ς ι: $\frac{50}{70} = \frac{2}{7}$, $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, $\frac{400}{900} = \frac{4}{9}$, $\frac{5000}{8000} = \frac{5}{8}$.

Σ ι μ ί ο ς ι. Για τιν απλοπίιςι τον κλαζμάτον εποφελύντε τα γνορίςματα τις διερετότιτας.

3. Να απλοπιιθι το κλάζμα $\frac{180}{360}$.

Λ ί ς ι. $\frac{180}{360} = \frac{18}{36} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Πρότι φορα απλοπιίςαμε το κλάζμα δια τυ 10. Μετα τιν πρότι απλοπίιςι βρίκαμε 18 ςτον αριθμιτι κε 36 ςτον παρονομαςτι, ι οπίι διερύντε δια τυ 9. Μετα τι δέφτερι απλοπίιςι βρίςκυμε το κλάζμα $\frac{2}{4}$. Απλοπιόντας δια 2, έχομε $\frac{1}{2}$.

Ας κάνυμε ένα παράδιγμα πιο ςίνθετις απλοπίιςις.

4. Να απλοπιιθι το κλάζμα: $\frac{2310}{7700}$.

Λ ί ς ι. Σίμφονα με τα γνορίςματα τις διερετότιτας απλοπιύμε τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος δια 10 κε βρίςκυμε:

$$\frac{2310}{7700} = \frac{231}{770}.$$

Κανένα απο τα γνοςτα ςε μας γνορίςματα τις διερετότιτας δεν μας δίχνι τι δινατότιτα να εχςακολυθίςυμε τιν απλοπίιςι. Τότε αρχίζυμε να δοκιμάζυμε αν απλοπιίτε το κλάζμα δια τον πρότον αριθμον, αρχίζοντας τι δοκιμι κατα ςιρα ςίμφονα με τον πίνακα τον πρότον αριθμον. Ιςτερα απο το δίο, τρία κε πέντε έρχετε ο πρότος αριθμος 7. Απλοπιύμε δια 7.

$$\frac{231}{770} = \frac{33}{110}.$$

Ο ακόλυθος πρότος αριθμος ίνε ο 11. Απλοπιύμε δια 11:

$$\frac{33}{110} = \frac{3}{10}.$$

Να ςινεχίςυμε τιν απλοπίιςι δεν ίνε πια δινατο.

§ 10. Τροπι ετερονίμον κλαζμάτον ςε ομόνιμα.

Στιν § 6 τυ κεφαλέυ αφτυ μάθαμε να ςινκρίνυμε τα ομόνιμα κλάζματα, δηλ. εκίνα, πυ έχυν τυς ίδιυς παρονομαςτες. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος μας επιτρέπι να ςινκρίνυμε τα ετερόνιμα κλάζματα, δηλ. εκίνα, πυ έχυνε διάφορυς παρονομαςτες. Γι' αφτο αντικαταςτένυμε τα ετερόνιμα κλάζματα με ιςοδίναμα ομόνιμα: αφτι ι αντικατάςταςι ονομάζετε τ ρ ο π ι τ ο ν κ λ α ζ μ ά τ ο ν ς ε ο μ ό ν ι μ α.

1. Να τραπυν ςε ομόνιμα τα κλάζματα: $\frac{7}{12}$ κε $\frac{9}{20}$.

Το πρόβλιμα αφτο έχι πολες λίςις. Μπορύμε να διαλέκςυμε όςα θα θέλαμε κλάζματα, τα οπία να ίνε ίςα με το κλάζμα $\frac{7}{12}$. Επίςις μπορύμε να βρύμε απεριόριςτο αριθμο κλαζμάτον ίςον με το κλάζμα $\frac{9}{20}$.

Απο τα κλάζματα τις πρότις κε δέφτερις ςιρας, θα μπορύςαμε να διαλέκςυμε διο ομόνιμα κλάζματα. Ο αριθμος αφτον τον κλαζμάτον τον παρμένον ανα δίο ίνε απεριόριςτος. Ετςι:

$$\frac{7}{12}=\frac{35}{60}=\frac{70}{120}=\frac{105}{180}=\frac{140}{240}=\dots$$

$$\frac{9}{20}=\frac{27}{60}=\frac{54}{120}=\frac{81}{180}=\frac{108}{240}=\dots$$

Για να αποφίγυμε τις περιτες πράκςις, κατα τιν τροπι τον κλαζμάτον ςε ομόνιμα, διαλέγυμε τέτια κλάζματα τον οπίον παρονομαςτις να ίνε το ελάχιςτο πολαπλάςιο τον αριθμον, πυ ίνε παρονομαςτις τον ςινκρινόμενον κλαζμάτον. Ετςι κε ςτο παράδιγμάμας, το ελάχιςτο πολαπλάςιο τον παρονομαςτον ίνε ο αριθμος 60:

$$\frac{\overbrace{7}^{5}}{12}=\frac{35}{60},\quad \frac{\overbrace{9}^{3}}{20}=\frac{27}{60}.$$

Σ ι μ ί ο ς ι. Διερόντας το 60 πρότα δια 12 κε έπιτα δια 20, θα βρύμε τυς αριθμυς 5 κε 3, πυ δίχνυν με πόςυς αριθμυς πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ πρότυ κε δέφτερυ κλάζματος, για να μετατρέπςυμε τα κλάζματα αφτα ςε κλάζματα με παρονομαςτι 60.

Τον αριθμο 5 τον ονομάζυμε ς ι μ π λ ι ρ ο μ α τ ι κ ο π α ρ ά γ ο ν τ α τυ πρότυ κλάζματος. Ο ςιμπλιροματικος παράγοντας τυ δέφτερυ κλάζματος ίνε ο αριθμος 3.

Ι ςιμπλιροματικι παράγοντες ςτα παραδίγματα αφτα ςιμιόθικαν με αριθμυς, πυ τέθικαν πάνο απ' τον αριθμιτι με παρένθεςι απο κάτο.

Για να τρέπςυμε διο κλάζματα ςε ομόνιμα, πρέπι:

1) Να βρύμε το ελάχιςτο πολάπλαςιο τον παρονομαςτόν-τυς.

2) Να βρύμε για κάθε παρονομαςτι τον ςιμπλιροματικο πολαπλαςιαςτι, διερόντας τον κινο παρονομαςτι δια τυ παρονομαςτι τυ δομένυ κλάζματος.

3) Να πολαπλαςιάςυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ κάθε κλάζματος επι τον ςιμπλιροματικο πολαπλαςιαςτι.

2. Να τραπυν ςε ομόνιμα τα κλάζματα: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{11}{60}$.

Λ ί ς ι. Το ελάχιςτο κινο πολαπλάςιο τον παρονομαςτον ίτε ο κινος παρονομαςτις ίνε το 120.

$$\frac{\overbrace{3}^{15}}{8}=\frac{45}{120},\quad \frac{\overbrace{5}^{10}}{12}=\frac{50}{120},\quad \frac{\overbrace{9}^{3}}{40}=\frac{27}{120},\quad \frac{\overbrace{11}^{2}}{60}=\frac{22}{120}.$$

§ 11. Ι αλαγι τυ μεγέθυς τυ κλάζματος απο τιν πρόςθεςι ενος κε τυ αφτυ προςθετέυ ςτον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος.

1. Ας πάρυμε το κλάζμα $\frac{4}{5}$ κε ας προςθέςυμε ςτον αριθμιτι κε ςτον παρονομαςτὶ-τυ τι μονάδα. Θα έχυμε τα κλὰζματα: $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ κ. τ. λ.

Τα κλάζματα ίνε διατεταγμένα ανάλογα με το μέγεθὸς-τυς απ' το μικρότερο προς το μεγαλίτερο. Τα κλάζματα αφτα διαφέρυν απο τι μονάδα κατα $\frac{1}{6}$, κατα $\frac{1}{7}$, κατα $\frac{1}{8}$ διλ. ολοένα κατα πιο μικρότερο μέγεθος κε όςο πιο πολι το κλάζμα πλιςιάζι προς τι μονάδα, τόςο πιο πολι μεγαλόνι.

Αν εκςετάςυμε τιν αλίθια τυ νόμυ αφτυ πάνο ςε άλο κλάζμα, π. χ. ςτο κλάζμα $\frac{3}{8}$, θα δύμε πος κε δο ο νόμος αφτος ιςχίι: $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{10}$ κ. τ λ. Αφτα τα κλὰζματα προςενκίζυν προς τι μονὰδα κε διαφέρυνε απ' αφτιν κατα $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{10}$ διλ. ολοένα κε κατα πιο μικρότερο μέγεθος.

2. Ας πὰρυμε καταχριςτικο κλάζμα π. χ. $\frac{8}{7}$ κι ας αφκςὶςυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτί-τυ με ένα κε τον αφτο αριθμο· π. χ. τι μονάδα.

Ας ςινκρίνυμε τα κλὰζματα, πυ βρίκαμε το ένα με τ' άλο κε με τι μονάδα.

$$\frac{8}{7}>\frac{9}{8}>\frac{10}{9}>\frac{11}{10}>\frac{12}{11}.$$

Τα κλάζματα αφτα διαφέρον απ' τι μονάδα κατα: $\frac{1}{7}$, κατα $\frac{1}{8}$, κατα $\frac{1}{9}$, κατα $\frac{1}{10}$, κατα $\frac{1}{11}$.

Εδο ο κλαζματικος αριθμος πλιςιάζι ςτι μονάδα λιγοςτέβοντας.

Οταν προςθέτυμε ςτον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος, πυ δεν ίνε ίςο με τι μονάδα, έναν κε τον αφτον αριθμο, αλάζυμε το μέγεθος τυ κλάζματος έτςι, όςτε το μέγεθος τυ κλάζματος πλιςιάζι ςτι μονάδα. Ετςι αν το κλάζμα ίνε κίριο μεγαλόνι κε αν καταχριςτικο μικρένι.

3. Αφτι ι ιδιότιτα τυ κλάζματος μας επιτρέπι να ςινκρίνυμε τα κλάζματα, ι αριθμιτες κε ι παρονομαςτες τον οπίον διαφέρον κατα τον ίδιο αριθμο μονάδον.

Ας ςινκρίνυμε τα ακόλοθα κλάζματα κατα το μέγεθός-τυς:

1) $\frac{8}{17}$ κε $\frac{13}{22}$, 2) $\frac{10}{7}$ κε $\frac{14}{11}$.

Λ ί ς ι. 1) $\frac{13}{22} > \frac{8}{17}$, επιδι το κλάζμα $\frac{13}{22} = 1 - \frac{9}{22}$, ενο το $\frac{8}{17} = 1 - \frac{9}{17}$· ι τελεφτέα διαφορα ίνε μικρότερι:

2) $\frac{10}{7} > \frac{14}{11}$, επιδι $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$ ενο $\frac{14}{11} = 1 + \frac{3}{11}$· το τελεφτέο άθριζμα ίνε μικρότερο.

VIII. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΕ ΑΦΕΡΕΣΙ ΤΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Πρόςθεςι κε αφέρεςι ομονίμον κλαζμάτον.

Το αςπράδι τυ αβγυ όρνιθας αποτελι τα $\frac{5}{9}$ τυ βάρυς όλυ τυ αβγυ, το βάρος τυ κρόκυ ίνε τα $\frac{3}{9}$ όλυ τυ βάρυς τυ αβγυ. Πόςο μέρος τυ βάρυς αποτελι το τςόφλι;

Λ ί ς ι. $\frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$· Αφτο ίνε το βάρος τυ αςπραδιυ κε τυ κρόκυ.

Ας βρύμε το βάρος τυ τςοφλιυ. $1 - \frac{8}{9} = \frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

Το βάρος τυ τςοφλιυ αποτελι το $\frac{1}{9}$ τυ όλυ βάρυς τυ αβγυ.

Εμις εδο προςθέςαμε κε αφερέςαμε ομόνιμα μέρι: ένατα μερίδια. Κε ςτο αποτέλεζμα βρίκαμε ομόνιμα μερίδια: ένατα.

Στιν περίπτοςι αφτι ι παρονομαςτες τον κλαζμάτον δεν άλακςαν.

Οταν προςθέτυμε ίτε αφερύμε ομόνιμα κλάζματα προςθέτυμε ίτε αφερύμε τυς αριθμιτες, ενο ο παρονομαςτις μένι ο ίδιος.

§ 2. Πρόςθεςι κε αφέρεςι ετερονίμον κλαζμάτον.

1. Σ' ένα κυνέλι δόςανε $\frac{1}{4}$ χγ ζμίχα, $\frac{3}{10}$ χγ ςανο κε $\frac{1}{8}$ χγ καρότο. Πόςι τροφι δόςανε ςτο κυνέλι;

Λ ί ς ι:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{1}{8} = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} + \frac{5}{40} = \frac{27}{40} \text{ χγ}.$$

Στο πρόβλιμα αφτο έχυμε να προςθέςυμε κλάζματα ετερόνιμα. Τιν πρόςθεςι αφτι τι μετατρέπυμε ςε πρόςθεςι ομονίμον κλαζμάτον. Γι' αφτο όλα τα κλάζματα τα παραςτένυμε με τεςαρακοςτα, εποφελύμενι τυς κανόνες τις αναγογις τον κλαζμάτον ςε κινο παρονομαςτι, κε προςθέτυμε αφτα τα τεςαρακοςτα.

Οταν προςθέτυμε ίτε αφερύμε ετερόνιμα κλάζματα, πρέπι πρότα να τα τρέψυμε ςε ομόνιμα κε έπιτα προςθέτυμε ίτε αφερύμε τυς αριθμιτες κε παρονομαςτι αφίνυμε τον ίδιο.

Ι γραφτι διάταξι τις πρόςθεςις κε αφέρεςις δίχνετε ςτα ακόλυθα παραδίγματα.

2. Να προςτεθυν τα κλάζματα: $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$.

Λ ί ς ι. $\overset{4}{\frac{5}{6}} + \overset{3}{\frac{7}{8}} = \frac{20}{24} + \frac{21}{24} = \frac{20+21}{24} = \frac{41}{24} = 1\frac{17}{24}$.

3. Να γίνι ι αφέρεςι: $\frac{14}{15} - \frac{7}{20}$.

Λ ί ς ι. $\overset{4}{\frac{14}{15}} - \overset{3}{\frac{7}{20}} = \frac{56}{60} - \frac{21}{60} = \frac{56-21}{60} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$.

Ι. Σ' αφτα τα παραδίγματα παρονομαςτες ίνε αριθμι, πυ έχυν κινυς παράγοντες.

Για να βρύμε τον κινο παρονομαστί-τυς κατα τιν πρόσθεσι κε αφέρεσι χριάσθικε να βρύμε το ελάχιστο πολαπλάσιο τον παρονομαστον όλον τον δομένον κλαζμάτον σίμφονα με το γενικο κανόνα.

II. Ι παρονομαστες τον κλαζμάτον ίνε αριθμι αμιβέα πρότι.

4. Να προστεθυν τα κλάζματα: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$.

Ο κινος παρονομαστις ίνε $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$. Αφτος ισύτε με το γινόμενο όλον τον παρονομαστον.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{20}{30}+\frac{18}{30}+\frac{15}{30}=\frac{20+18+15}{30}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30}.$$

III. Ενας απο τυς παρονομαστες διερίτε με όλυς τυς άλυς.

5. Να αφερεθυν $\frac{29}{40}-\frac{5}{8}$.

Ο κινος παρονομαστις ίνε 40, επιδι ο 40 διερίτε δια 40 κε δια 8.

$$\frac{29}{40}-\frac{5}{8}=\frac{29}{40}-\frac{25}{40}=\frac{29-25}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

IV. Οταν προσθέτυμε κε αφερύμε κλάζματα, κάποτε μεταχιριζόμαστε απλυστεμένυς τρόπυς στιν τροπι τον ετερονίμον κλαζμάτον σε ομόνιμα (όχι σίμφονα με το γενικο κανόνα). Π. χ.

6. $\frac{5}{12}+\frac{1}{8}+\frac{3}{20}=\frac{50}{120}+\frac{15}{120}+\frac{18}{120}=\frac{50+15+18}{120}=\frac{83}{120}.$

Πέρνυμε το μεγαλίτερο παρονομαστι τον κλαζμάτον, πυ θα προσθέσυμε ίτε θα αφερέσυμε, κε τον πολαπλασιάζυμε διαδοχικα επι τον 2, 3, 4, 5, κ. τ. λ., κε κάθε φορα δοκιμάζυμε αν το γινόμενο, πυ βρίκαμε, διερίτε δια τον παρονομαστον τον άλον κλαζμάτον:

$20 \cdot 2 = 40$ δεν διερίτε δια 12, $20 \cdot 3 = 60$ δεν διερίτε δια 8,
$20 \cdot 4 = 80$ „ „ „ 12, $20 \cdot 5 = 100$ „ „ „ 12,
$20 \cdot 6 = 120$ διερίτε κε δια 12, κε δια 8. Οστε το 120 θα ίνε ο κινος παρονομαστις.

V. Οταν έχυμε προφορικα να προσθέσυμε ί κε να αφερέσυμε κλάζματα, σιχνα ίνε εφκολότερο να βρίσκυμε τον κινο παρονομαστι με κίνο τον τρόπο, τον οπίον εμις εφαρμόζυμε στυς αμιβέα πρότυς αριθμυς.

7. Να προστεθυν: $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{36+40}{96}=\frac{76}{96}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}.$

§ 3. Πρόσθεσι κε αφέρεσι μιχτον αριθμον.

Στα ακόλυθα παραδίγματα δίχνετε ι πρόσθεσι κε ι αφέρεσι μιχτον αριθμον.

1. $3\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=3\frac{7}{9}.$

Εδο ο ένας προσθετέος ίνε μιχτος αριθμος κε ο άλος κίριο κλάζμα. Κατα τιν πρόσθεσί-τυς προσθέτυν τον κλαζματικο προσθετέο με το κλαζματικο μέρος τυ μιχτυ αριθμυ.

2. $7\frac{3}{8}+2\frac{1}{8}=9+\frac{4}{8}=9\frac{1}{2}$, γιατι κατα τιν πρόσθεσι τον κλαζμάτον έχυμε:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Οταν προσθέτυμε δίο μιχτυς αριθμυς, προσθέτυμε χοριστα τυς ακέρευς κε χοριστα τυς κλαζματικυς αριθμυς κε πέρνυμε το γενικό-τυς άθριζμα.

3. $5\frac{4}{7}+2\frac{3}{7}=5+2+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=5+2+1=8.$

Το παράδιγμα δίχνι, πος το άθριζμα τον μιχτον αριθμον μπορι να ίνε ακέρεος αριθμος.

4. $10\frac{7}{15}+3\frac{4}{15}+2\frac{8}{15}=15\frac{19}{15}=16\frac{4}{15}$, εδο

$$\frac{7}{15}+\frac{4}{15}+\frac{8}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}.$$

Στο παράδιγμα αφτο φένετε, πος αν το άθριζμα τον κλαζματικον μερον τον μιχτον αριθμον θα ίνε καταχριστικο κλάζμα, τότε απο το κλάζμα τύτο πρέπι να κσεχορίσυμε τον ακέρεο αριθμο κε να τον προσθέσυμε στο άθριζμα τον ακέρεον αριθμον.

5. $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+7\frac{1}{2}=12+\frac{7}{8}=12\frac{7}{8}$, όπυ

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{2+1+4}{8}=\frac{7}{8}.$$

Στο παράδιγμα αφτο φένετε ι πρόςθεςι τον μιχτον αριθμον τα κλαζματικα μέρι τον οπίον ίνε με διαφορετικυς παρονομαςτες.

6. $8\frac{5}{11}-3\frac{2}{11}=5\frac{3}{11}$.

Εδο εκςετάζετε περίπτοςι αφέρεςις, όταν κε ο ακέρεος αριθμος κε το κλαζματικο μέρος τυ μιοτέυ ίνε μεγαλίτερο απο το αντίςτιχο μέρος τυ ακέρευ αριθμυ κε τυ κλαζματικυ μέρυς τυ αφερετέυ.

7. $9-3\frac{5}{16}=8+1-3\frac{5}{16}=5\frac{11}{16}$, όπυ $1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$.

Στο παράδιγμα αφτο ίνε ανάνκι να δανιςτύμε μια μονάδα απο το μιοτέο κε να τιν τρέπςυμε ςε καταχριςτικο κλάζμα. Ιςτερα κάνυμε τιν αφέρεςι όπος κε πριν.

8. Να βρεθι ι διαφορα: $6\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}$.

Λ ί ς ι. $6\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}=6\frac{2}{4}-2\frac{3}{4}=5\frac{6}{4}-2\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$.

Εδο το κλαζματικο μέρος τυ μιοτέυ ίνε μικρότερο απο το κλαζματικο μέρος τυ αφερετέυ. Για να κάνυμε τιν αφέρεςι κατορθοτι, δανιζόμαςτε μια μονάδα απο τον ακέρεο αριθμο τυ μιοτέυ κε τιν τρέπυμε ςε καταχριςτικο κλάζμα κε ίςτερα κάνυμε τιν αφέρεςι.

Κατα τιν αφέρεςι τον μιχτον αριθμον, βρίςκυμε χοριςτα τι διαφορα τον ακέρεον αριθμον κε χοριςτα τον κλαζματικον μερόν-τυς κε πέρνυμε το άθριζμά-τυς.

IX. ΕΒΡΕΣΙ ΤΥ ΜΕΡΥΣ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΥ ΚΕ ΤΥ ΑΡΙΘΜΥ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΡΟΣ-ΤΥ.

§ 1. Εβρεςι τυ μέρυς ενος αριθμυ.

Για να λίςυμε προβλίματα τις έβρεςις τον μερον τυ αριθμυ κε τις έβρεςις τυ αριθμυ απο τα μέρι-τυ, αρχι να κςέρυμε τις ιδιότιτες τον κλαζματικον αριθμον.

I. Εβρεςι ενος οπιυδίποτε μέρυς τυ αριθμυ. 1. Για τον κανονικο φοτιζμο χριάζετε το εμβαδο τον παραθίρον να αποτελέςι το $\frac{1}{5}$ τυ εμβαδυ τις κατικίας. Πόςο πρέπι να ίνε το εμβαδο τον παραθίρον τυ δοματίυ, πυ έχι εμβαδο πατόματος 45 **τετ. μ**;

Λ ί ς ι. Πρέπι να βρύμε το $\frac{1}{5}$ τυ 45. Γι' αφτο πρέπι να διερέςυμε το 45 δια 5:

$$\text{το } \frac{1}{5} \text{ τυ } 45 \text{ ιςύτε } \frac{45}{5}=9.$$

2. Να βρεθι 1) το $\frac{1}{12}$ τυ αριθμυ 60, 2) το $\frac{1}{7}$ τυ 3.

Λ ί ς ι. 1) το $\frac{1}{12}$ τυ 60 ιςύτε με $\frac{60}{12}=5$,

2) το $\frac{1}{7}$ τυ 3 ιςύτε με $\frac{3}{7}$.

3. Να βρεθι: 1) το $\frac{1}{5}$ τον $\frac{3}{4}$ **χγ**, 2) το $\frac{1}{4}$ τυ $2\frac{8}{21}$.

Λ ί ς ι. Για να βρύμε το $\frac{1}{5}$ τυ αριθμυ, πρέπι να ελατόςυμε τον αριθμο 5 φορες. Για να ελατόςυμε το κλάζμα 5 φορες, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον παρονομαςτί-τυ επι 5. Θα έχυμε:

1) το $\frac{1}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$ ιςύτε $\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$ **χγ**,

2) το $\frac{1}{4}$ τυ $2\frac{8}{21}$ ιςύτε με το $\frac{1}{4}$ τυ $\frac{50}{21}$ ιςύτε $\frac{50}{21\cdot 4}=\frac{25}{42}$.

II. Εβρεςι μέρυς τυ αριθμυ, το οπίο παραςτένετε με οπιοδίποτε κλάζμα.

4. Για 1 **κιβ. μ** τίχυ απο τύβλα χριάζοντε 400 τύβλα κε 280 **λ.** διάλιςι αζβέςτι. Πόςα ιλικα χριάζοντε για να χτίςυμε τίχο $\frac{5}{8}$ **κιβ. μ**;

Λ ί ς ι 1. Ας βρύμε τί ποςο τύβλα χριάζοντε. Για 1 **κιβ. μ** πρέπι να έχυμε 400 κομάτια τύβλα. Πόςα τύβλα χριάζοντε για τίχο $\frac{1}{8}$ **κιβ. μ**;

Πρέπι να έχυμε το $\frac{1}{8}$ τυ όλυ ποσυ τον τύβλον.

Το $\frac{1}{8}$ τυ 400 ισύτε με $\frac{400}{8}$.

Τόρα πρέπι να βρύμε τα $\frac{5}{8}$ τυ 400. Τα $\frac{5}{8}$ θα ίνε 5 φορες περισότερο απο το $\frac{1}{8}$. Αφχσένυμε το κλάζμα $\frac{400}{8}$ 5 φορες. Γι'αφτο αρκι να πολαπλασιάσυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος επι 5.

$$\text{Τα } \frac{5}{8} \text{ τυ } 400 \text{ ισύντε } \frac{400 \cdot 5}{8} = 50 \cdot 5 = 250$$

Χριάζοντε 250 τύβλα.

2. Ετσι βρίσκυμε κε τα $\frac{5}{8}$ τυ 280 **λ**, διλ. τυ ποσυ τις διάλισις, πυ χριάζετε.

$$\text{Το } \frac{1}{8} \text{ τυ } 280 \text{ ισύτε με } \frac{280}{8},$$

$$\text{τα } \frac{5}{8} \text{ τυ } 280 \text{ ισύντε με } \frac{280 \cdot 5}{8} = 35 \cdot 5 = 175 \text{ λ.}$$

5. Να βρεθυν: 1) τα $\frac{3}{8}$ τυ 50, 2) τα $\frac{5}{6}$ τυ $\frac{3}{4}$, 3) τα $\frac{3}{4}$ τυ $2\frac{8}{21}$.

Λίσι. 1) το $\frac{1}{8}$ τυ 50 αποτελι $\frac{50}{8}$,

$$\text{τα } \frac{3}{8} \text{ τυ } 50 \text{ ίνε } \frac{50 \cdot 3}{8} = \frac{25 \cdot 3}{4} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}.$$

$$2) \text{ το } \frac{1}{6} \text{ τυ } \frac{3}{4} \text{ αποτελι } \frac{3}{4 \cdot 6} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8},$$

$$\text{τα } \frac{5}{6} \text{ τυ } \frac{3}{4} \text{ ισύντε με } \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8},$$

$$3) \text{ το } \frac{1}{4} \text{ τυ } 2\frac{8}{21} \text{ ισύτε με } \frac{1}{4} \text{ τυ } \frac{50}{21}, = \frac{50}{21 \cdot 4} = \frac{25}{21 \cdot 2} = \frac{25}{42},$$

$$\text{τα } \frac{3}{4} \text{ τυ } 2\frac{8}{21} \text{ αποτελύνε } \frac{50 \cdot 3}{21 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{25}{14} = 1\frac{11}{14}.$$

Για να βρύμε το μέρος ενος αριθμυ, πρέπι το δομένο αριθμο να τον ελατόσυμε τόσες φορες, όσες μονάδες περιέχι ο παρονομαστις τυ κλάζματος, πυ παραστένι το ζιτύμενο μέρος τυ ακέρευ. Το εκσαγόμενο, πυ βρίσκομε πρέπι να το αφχσίσυμε τόσες φορες, όσες μονάδες περιέχι ο αριθμιτις τυ ίδιυ κλάζματος.

§ 2. Εβρεσι τυ αριθμυ απο το μέρος-τυ.

Μάθαμε να λίνυμε προβλίματα όταν θέλυμε να βρίσκυμε το μέρος ενος αριθμυ. Θα μάθυμε τόρα να λίνυμε αντίθετα προβλίματα, όταν θέλυμε να βρύμε τον ακέρεο αριθμο απο ένα μέρος-τυ.

1. Στα σιστατικα τυ ιδικυ ατσαλιυ περιέχετε $\frac{1}{25}$ νίκελ. Να βρεθι το βάρος τυ ατσαλιυ, για τιν κατασκεβι τυ οπίυ χσοδέφτικαν 20 **χγ.** νίκελ.

Λίσι. Ας σιμιόσυμε με το γράμα x το άγνοστο βάρος τυ ατσαλιυ. Το νίκελ αποτελι το $\frac{1}{25}$ αφτυ τυ αριθμυ. Το $\frac{1}{25}$ τυ άγνοστυ x ας το παραστίσυμε έτσι: $\frac{1}{25}x$.

Ας γράπσυμε με τον τίπο το πρόβλιμα: $\frac{1}{25}x = 20$ **χγ.**

Ολο το x φένετε, πος θα ίνε 25 φορες μεγαλίτερο παρα το $\frac{1}{25}x$.

$$x = \frac{25}{25}x \text{ χγ}, \quad x = 20 \cdot 25 = 500 \text{ χγ.}$$

Πιο σίντομι γραφι τις λίσις θάνε ι ακόλυθι:

$$\frac{1}{25}x = 20, \quad x = 20 \cdot 25 = 500 \text{ χγ.}$$

Στο πρόβλιμα αφτο το γνοστο μέρος έχι παρασταθι με ακέρεα χιλιόγραμα.

Ας λίσυμε άλο πρόβλιμα, στο οπίο το μέρος, πυ μας δόθικε, θα παραστένετε με κλαζματικο αριθμο.

2. Σιδερένιο δοκάρι μάκρυς $\frac{1}{5}$ **μ** ζιγίζι $\frac{3}{4}$ **χγ.** Πόσο ζιγίζι 1 **μ** παρόμιο δοκάρι;

Λ ί σ ι. $\frac{1}{5}x=\frac{3}{4}$ **χγ.** $x=\frac{5}{5}x$, $x=\frac{3\cdot5}{4}=\frac{15}{4}$ **χγ** $=3\frac{3}{4}$ **χγ.**

§ 3. Εβρεσι τυ αριθμυ, τυ οπίυ το γνοστο μέρος-τυ ίνε οπιοδίποτε κλάζμα.

1. Μια μπριγάδα απο κολχόζνικυς όργοσε 25 **εχτ.** νιατο. Αφτο αποτελύσε τα $\frac{5}{12}$ τυ πλάνυ. Πόσο πλάνο ίχε ι μπριγάδα για όργομα νιατυ;

Λ ί σ ι. Ας παραδεχτύμε πος το πλάνο, πυ δόθικε στιν μπριγάδα, ίνε ο ζιτύμενος αριθμος. Ι εργασία, πυ εχτελέσθικε, αποτελι μονάχα ένα μέρος τυ πλάνυ. Κσέροντας το μέρος αφτο, πρέπι να βρύμε το άγνοστο πλάνο. Ας παραστίσυμε το άγνοστο σε μας πλάνο με το x κε ας βρύμε ένα μέρος αφτο τυ αγνόστυ x.

Θα γράπσυμε τι λίσι ος εκσις:

τα $\frac{5}{12}$ τυ άγνοστυ x τα σιμιόνυμε: $\frac{5}{12}x$,

το $\frac{1}{12}$ » » » » $\frac{1}{12}x$.

Κε έτσι τα $\frac{5}{12}x$ αποτελυν 25 **εχτ**, το $\frac{1}{12}x$ ίνε κατα 5 φορες λιγότερο διλ. 5 **εχτ.** Γράφυμε λιπον: $\frac{1}{12}x=5$ **εχτ.** Ολο το πλάνο αφτις τις μπριγάδας, διλαδι ολόκλιρο το x ίνε 12 φορες περισότερο απο το δοδέκατο μέρος-τυ:

Ας βρύμε λιπον το x:

$$x=5\cdot12=60 \text{ εχτ.}$$

Τι γραφτι λίσι πρέπι να τιν κάνυμε πιο σίντομα:

$$\frac{5}{12}x=25,\ \frac{1}{12}x=\frac{25}{5},\ x=\frac{25\cdot12}{5}=60 \text{ εχτ.}$$

2. Να βρεθι το x, αν ίνε γνοστο πος το $\frac{3}{16}x=\frac{4}{5}$ **εχτ.**

Λ ί σ ι. $\frac{1}{16}x$ ίνε 3 φορες μικρότερο απο το $\frac{3}{16}x$,

$$\frac{1}{16}x=\frac{4}{5\cdot3},\ x=\frac{16}{16}x=\frac{4}{5\cdot3}\cdot16=\frac{4\cdot16}{5\cdot3}=\frac{64}{15} \text{ εχτ.}=4\frac{4}{15} \text{ εχτ.}$$

Για να βρεθι ο ακέρεος, όταν δίνετε ο αριθμος, πυ αντιστιχι με ένα μέρος αφτυ τυ ακερέυ, κε δίνετε το κλάζμα, πυ δίχνι, τί μέρος τυ ακερέυ αποτελι ο δομένος αριθμος, πρέπι το δομένο αριθμο να τον ελατόσυμε τόσες φορες όσες μονάδες περιέχι ο αριθμιτις τυ κλάζματος, πυ παραστένι μέρος τυ ακερέυ. Το εκσαγόμενο, πυ βρίσκυμε, πρέπι να το αφκσίσυμε τόσες φορες, όσες μονάδες περιέχι ο παρονομαστις τυ ίδιυ κλάζματος.

Χ. ΠΟΛΑΠΛΑΣΙΑΖΜΟΣ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Πολαπλασιαζμος κλάζματος επι ακέρεο αριθμο.

1. Ενα αφτοκίνιτο κσοδέβι $\frac{4}{5}$ **χγ** βενζίνα για να διατρέκσι 1 **χμ.**

Πόσα χιλιόγραμα βενζίνα χριάζετε, αν έχι να διατρέκσι 6 **χμ;**

Λ ί σ ι. Σε 1 **χμ** δρόμο χριάζοντε $\frac{4}{5}$ **χμ,** στο δέφτερο κσανα $\frac{4}{5}$, επίσις στο τρίτο, στο τέταρτο, στο πέμπτο κε στο έχτο χιλιόμετρο θα χριασθι απο $\frac{4}{5}$ **χγ.**

Το όλο χριάζοντε: $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$, ίτε $4\frac{4}{5}$ **χγ.**

Εμις ανανκαζόμαστε τον κλαζματικο αριθμο $\frac{4}{5}$ να τον επαναλάβυμε 6 φορες ός προσθετέο, ίτε να αφκσίσυμε τον κλαζματικο αριθμο $\frac{4}{5}$ 6 φορες, πυ ίνε το ίδιο πράμα.

Ο πολαπλασιαζμος γράφετε πιο σίντομα:

$$\frac{4}{5}\cdot6=\frac{24}{5}.$$

Εχυμε περίπτοσι πολαπλασιαζμυ κλάζματος επι ακέρεο αριθμο.

Για να πολαπλασιάςυμε κλάζμα επι ακέρεο αριθμο, πρέπι να πολαπλασιάςυμε τον αριθμιτι επι τον ακέρεο αριθμο, κε το εβριςκόμενο γινόμενο να το διερέςυμε δια τυ παρονομαςτι.

Ας γράπςυμε αφτον τον κανόνα με γράματα: $\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a\cdot m}{b}$.

2. Ας λίςυμε τα παραδίγματα: 1) $\frac{1}{7}\cdot 7$, 2) $\frac{4}{7}\cdot 7$.

Λ ί ς ι. 1) $\frac{1}{7}\cdot 7=1$.

Ο πολαπλασιαζμος αφτος δε χριάζετε ιδιέτερες επεχςιγίςις. Διερόντας τι μονάδα ςε 7 μέρι κε έπιτα επαναλαβένοντας κάθε μέρος 7 φορες, εχτελύμε διο αμιβέα αντίθετες πράχςις κε χςανα βρίςκυμε τι μονάδα.

$$2)\ \frac{4}{7}\cdot 7=4.$$

Διερόντας το 4 δια τυ 7 κε πολαπλασιάζοντας το εβριςκόμενο επίςις επι 7, βρίςκυμε χςανα τον αριθμο 4.

Σ ι μ ί ο ς ι. Οταν έχυμε να πολαπλασιάςυμε κλαζματικο αριθμο επι ακέρεο, ίςον με τον παρονομαςτι τυ κλάζματος, ςτο γινόμενο βρίςκυμε αριθμο, ίςο με τον αριθμιτι τυ κλάζματος. Σε παρόμιες περιπτόςις πρέπι να ιποδίκςυμε το εχςαγόμενο αμέςος.

3. Ενα αφτοκίνιτο διατρέχι $10\frac{1}{2}$ **μ** ςτο δεφτερόλεφτο. Πόςι απόςταςι διατρέχι ςε 1 λεφτο;

Για να λίςυμε το πρόβλιμα αφτο πρέπι να πολαπλασιάςυμε τον μιχτο επι τον ακέρεο. Τον πολαπλασιαζμο αφτο μπορύμε να τον κάνυμε με διο τρόπυς.

$$1)\ 10\frac{1}{2}\cdot 60=10\cdot 60+\frac{1}{2}\cdot 60=600+\frac{60\cdot 1}{2}=600+\frac{60}{2}=$$
$$=600+30=630\ \text{μ στο λεφτο.}$$

Εδο εμις πολαπλασιάςαμε επι 60 χοριςτα τον ακέρεο αριθμο κε χοριςτα τον κλαζματικο αριθμο.

$$2)\ 10\frac{1}{2}\cdot 60=\frac{21}{2}\cdot 60=21\cdot 30=630\ \text{μ στο λεφτο.}$$

Στιν τελεφτέα λίςι εμις, πριν κάνυμε τον πολαπλασιαζμο, τρέ-

πςαμε τον μιχτο αριθμο ςε καταχριςτικο κλάζμα κε το πολαπλαςιάςαμε επι τον ακέρεο.

4. Ας πάρυμε άλο παράδιγμα: $\frac{7}{20}\cdot 4=\frac{7\cdot 4}{20}$.

Για να βρύμε το τελικο εχςαγόμενο ςτο παράδιγμα αφτο, πρέπι να κάνυμε απλοπίιςι, διλ. να διερέςυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι δια 4:

$$\frac{7}{20}\cdot 4=\frac{7\cdot 4}{20}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}.$$

§ 2. Πιά προβλίματα λίνυν με τον πολαπλαςιαζμο επι κλάζμα.

Ο πολαπλασιαζμος επι ακέρεο αριθμο ίνε απλοπιιμένι πρόςθεςι.

Πολαπλασιάζοντας επι ακέρεο αριθμο, αφχςένυμε τον δομένο αριθμο τόςες φορες, όςες μονάδες περιέχι ο πολαπλασιαςτις.

Ας εχςετάςυμε τόρα, πιά ςιμαςία έχι ο πολαπλασιαζμος επι κλάζμα.

1. Ενα μέτρο ςιδερένιας τενίας ζιγίζι 12 **χγ**. Πόςο ζιγίζυν: 1) 2 **μ**, 2) 5 **μ**, 3) $\frac{1}{4}$ **μ**, 4) $2\frac{1}{2}$ **μ**;

Λ ί ς ι. Ι παράςταςι τυ πολαπλασιαζμυ με γράματα ίνε: $ab=q$, όπυ a κε b ίνε παράγονες, q ίνε γινόμενο. Ας λίςυμε το πρόβλιμα αντικαταςτένοντας τα γράματα με αριθμυς. Στιν παράςταςι πρέπι να αντικαταςτίςυμε το a με τον αριθμο, πυ ςιμένι το βάρος 1 **μ** ςίδερυ· ςτι θέςι τυ b πρέπι να βάλυμε τον αριθμο, πυ δίχνι πόςα μέτρα έχι ι τενία. Το γινόμενο δίνι το βάρος τις τενίας.

1) $12\cdot b=12\cdot 2=$,   2) $12\cdot b=12\cdot 5=$,

3) $12\cdot b=12\cdot\frac{1}{4}=$,   4) $12\cdot b=12\cdot 2\frac{1}{2}=$,

Σ' όλες αφτες τις περιπτόςις μας δόθικε το βάρος ολάκερυ τυ μέτρυ, κε ζιτύςαμε το βάρος τις τενίας, το μάκρος τις οπίας έχι διαφορα απο το ολάκερο μέτρο. Το μάκρος αφτο μπορι να ίνε περιςότερο τυ ενος μέτρυ ίτε να αποτελι ένα μέρος-τυ.

Θα ίταν άςκοπο ςτι λίςι τυ προβλίματος 1 να κάνυμε πολαπλασιαζμο κε ςτι λίςι τον άλον περιπτόςεον να ςκεφτύμε να κάνυμε άλι πράχςι. Γι' αφτο κάθε φορα, όταν μας δίνετε ακέρεος, κε

πρέπι να βρύμε μέγεθος, πυ να ίνε μεγαλίτερο τυ αχερέυ ίτε να αποτελι μέρος-τυ, θα χρισιμοπιίσυμε τον πολαπλασιαζμο. Ετσι ο πολαπλασιαζμος επι κλάζμα μας οδιγι στιν έβρεσι τον μερον τυ αχερέυ.

Ας λίςυμε προβλίματα για όλες τις παραπάνο περιπτόςις:

1) $12 \cdot 2 = 24$, 2) $12 \cdot 5 = 60$.

Αφτες ι λίςις δε χριάζοντε επεχςιγίςις.

3) Το βάρος $\frac{1}{4}$ μ αποτελι $\frac{1}{4}$ τον 12 χγ. Ας βρύμε το $\frac{1}{4}$ τον 12 χγ· το $\frac{1}{4}$ τον 12 χγ ίνε 3 χγ. Παραπάνο ίπαμε, πος το πρόβλιμα λίνετε με τον πολαπλασιαζμο τυ 12 επι το $\frac{1}{4}$ διλ. $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$.

4) Να πολαπλασιαςθι το 12 επι $2\frac{1}{2}$. Αφτο ςιμένι το 12 να το επαναλάβυμε 2 φορες κε να προςθέςυμε ακόμα κε το μιςο τυ 12.

$12 \cdot 2 = 24$, $12 \cdot \frac{1}{2} = 6$, $12 \cdot 2\frac{1}{2} = 24 + 6 = 30$.

Αλος τρόπος. Ας τρέψυμε τον $2\frac{1}{2}$ σε καταχριςτικο κλάζμα κε ας πολαπλασιάσυμε: $12 \cdot \frac{5}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

Με τον πολαπλασιαζμο επι κλάζμα βρίςκυμε ένα ίτε κάμποσα μέρι τυ πολαπλασιαςτέυ.

§ 3. Πολαπλασιαζμος επι κλάζμα.

Επιδι τον πολαπλασιαζμο επι κλαζματικο αριθμο τον κάναμε έτςι, όπος κε τιν έβρεςι τυ μέρυς τυ ακέρευ, γι' αφτο χορις διςκολία μπορύμε να διατιπόςυμε τον κανόνα τις έβρεςις τυ γινομένυ κατα τον πολαπλασιαζμο επι κλάζμα.

I. Πολαπλασιαζμος κλάζματος επι κλάζμα. 1. Να πολαπλασιαςθυν το $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$

Λίςι. Βρίςκυμε τα $\frac{2}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$.

1) το $\frac{1}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$ θα ίνε $\frac{3}{4 \cdot 5}$, 2) τα $\frac{2}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$ θα ίνε $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}$.

Οςτε:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}.$$

Για να πολαπλασιάςυμε κλάζμα επι κλάζμα, πρέπι το γινόμενο τον αριθμιτον να το διερέςυμε δια τυ γινομένυ τον παρονομαςτον.

Με γράματα θάχυμε: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

II. Ενας απ' τυς παράγοντες ίνε ακέρεος ίτε μιχτος αριθμος.

2. Να βρεθι το γινόμενο τυ $3\frac{1}{8} \cdot 10$.

Λίςι. $3\frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{25}{8} \cdot 10 = \frac{25 \cdot 10}{8} = \frac{25 \cdot 5}{4} = \frac{125}{4} = 31\frac{1}{4}$.

Στιν περίπτοςι αφτι μετατρέψαμε τον μιχτο σε καταχριςτικο κλάζμα κε πολαπλασιάσαμε το κλάζμα αφτο επι τον ακέρεο.

Θα μπορύσαμε να κάνυμε τον πολαπλασιαζμο κι αλιος:

$$3\frac{1}{8} \cdot 10 = \left(3 + \frac{1}{8}\right) \cdot 10 = 3 \cdot 10 + \frac{1}{8} \cdot 10 = 30 + \frac{10}{8} =$$
$$= 30 + 1\frac{2}{8} = 31\frac{1}{4}.$$

3. Να γίνι ο πολαπλασιαζμος: $4 \cdot \frac{3}{5}$.

Λίςι. $4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Εδο κσάνα τον πολαπλασιαζμο επι κλάζμα, τον θεορύμε σαν έβρεςι τυ μέρυς τυ ακερέυ κε γι' αφτο πολαπλασιάζυμε τον ακέρεο επι τον αριθμιτι τυ δομένυ κλάζματος κε το γινόμενο διερύμε δια τυ παρονομαςτι τυ ίδιυ κλάζματος.

Παραβάλοντας αφτο το γινόμενο με το γινόμενο

$$\frac{3}{5}\cdot 4=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5},$$

θα δύμε, πος τα γινόμενα αφτα ίνε ίςα, διλ. κατα τον πολαπλαςιαζμο ακερέυ αριθμυ επι κλάζμα, μπορύμε να αλάκςυμε τι ςιρα τον παραγόντον.

4. Να πολαπλαςιαςτυν $5\cdot 2\frac{2}{3}$.

Λ ί ς ι. $5\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot 8}{3}=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

III. Κε ι διο παράγοντες ίνε μιχτι αριθμι.

5. Να πολαπλαςιαςτυν $4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{8}{27}$.

Λ ί ς ι. $4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{8}{27}=\frac{9}{2}\cdot\frac{35}{27}=\frac{9\cdot 35}{2\cdot 27}=\frac{35}{2\cdot 3}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$.

Για να πολαπλαςιάςυμε μιχτυς αριθμυς πρέπι να τρέπςυμε τον καθένα-τυς ςε καταχριςτικο κλάζμα.

IV. Πολαπλαςιαζμος κλάζματος επι αριθμο, ίςον με τον παρονομαςτι.

6. $\frac{5}{9}\cdot 9=\frac{5\cdot 9}{9}=5$. 7. $\frac{3}{14}\cdot 14=3$.

Οταν πολαπλαςιάζυμε κλάζμα επι αριθμο ίςο με τον παρονομαςτι, βρίςκυμε αριθμο ίςον με τον αριθμιτι.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ας ςινκρίνυμε τα γινόμενα:

1) $18\cdot 3=54$, 4) $18\cdot\frac{1}{2}=9$,

2) $18\cdot 2=36$, 5) $18\cdot\frac{1}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$,

3) $18\cdot 1=18$, 6) $18\cdot\frac{2}{15}=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$.

Βλέπυμε, πος το εκςαγόμενο ςτα δίο πρότα παραδίγματα ίνε μεγαλί-

τερο απο τον πολαπλαςιαςτέο, ςτο τρίτο ίνε ίςο με τον πολαπλαςιαςτέο, κε ςτα επίλιπα ίνε μικρότερο τυ πολαπλαςιαςτέυ.

Οςτε, κατα τον πολαπλαςιαζμο επι κίριο κλάζμα το γινόμενο θάνε μικρότερο απο τον πολαπλαςιαςτέο. Γι' αφτο δεν πρέπι να νομίζυμε ότι πολαπλαςιαζμος ςιμένι πάντα α φ κ ς ι ς ι. Ο αριθμος αφκςένι μονάχα, όταν πολαπλαςιάζυμε επι πολαπλαςιαςτι μεγαλίτερο τις μονάδας, ενο απο τον πολαπλαςιαζμο επι κίριο κλάζμα ο αριθμος ελατόνετε.

XI. ΔΙΕΡΕΣΙ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Αμιβέα αντίςτροφι αριθμι.

Ο ρ ι ς μ ο ς. Διο αριθμι ονομάζοντε αμιβέα αντίςτροφι, αν δίνυν γινόμενο τι μονάδα.

Να βρεθυν ι αντίςτροφι αριθμι τον: 7, 2, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$.

Λ ί ς ι. Ο αντίςτροφος αριθμος τυ 7 ίνε το $\frac{1}{7}$, επιδι $7\cdot\frac{1}{7}=1$.

Ο αντίςτροφος αριθμος τυ 2 ίνε το $\frac{1}{2}$, επιδι $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

" " " τυ $\frac{1}{4}$ " " 4 " $\frac{1}{4}\cdot 4=1$.

" " " τυ $\frac{5}{8}$ " " $\frac{8}{5}$ " $\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{8}=1$.

Αν μας δίνετε ένας οπιοςδίποτε αριθμος n, τότε τον αντίςτροφό-τυ αριθμο, πρέπι να τον παραςτίςυμε: $\frac{1}{n}$. Για το κλάζμα $\frac{a}{b}$ αντίςτροφος αριθμος θάνε $\frac{b}{a}$.

§ 2. Διέρεςι δια κλάζματος.

Ι διέρεςι ίνε πράκςι αντίςτροφι με τον πολαπλαςιαζμο. Με τι διέρεςι, απο το γινόμενο διο παραγόντον κε απο τον ένα παράγοντα βρίςκυν τον άλο παράγοντα. Ετςι, αν το δομένο γινόμενο ίνε 80 κε ο ένας παράγοντας 40, τότε με τι διέρεςι θα βρύμε, πος ο δέφτερος παράγοντας θα ίνε το 2.

Με τον ίδιο τρόπο βρίςκυμε με τι διέρεςι το δέφτερο παράγοντα κε τότε, όταν ο πρότος παράγοντας παραςτένετε με κλάζμα.

1. $9 : \frac{3}{4} = ;$

Ο διερετέος (διλ. το γινόμενο) ιςότε με 9, ο ένας παράγοντας (διερέτις) με $\frac{3}{4}$, ο άλος παράγοντας (πιλίκο) πρέπι να βρεθι. Αν τον παραςτίςυμε με το γράμα x, τότε θα έχυμε:

$$9 : \frac{3}{4} = x, \quad \frac{3}{4}x = 9, \quad \frac{1}{4}x = \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{4}{4}x = 3 \cdot 4 = 12.$$

Το πρόβλιμα αφτο καταλίγι ςε γνοςτο πρόβλιμα, ςτιν έβρεςι ακέρευ απο ένα μέρος-τυ.

Απο τιν άλι μερια αφτος ο άγνοςτος παράγοντας x ίνε πιλίκο τις διέρεςις τυ 9 δια $\frac{3}{4}$, διλ. $9 : \frac{3}{4}$. Οςτε, βρίςκοντας τον αριθμο 12 απο τυς αριθμυς 9 κε $\frac{3}{4}$, βρίςκυμε το πιλίκο τις διέρεςις 9 δια $\frac{3}{4}$, $9 : \frac{3}{4} = 12$· μ' άλα λόγια το πρόβλιμα τις διέρεςις δια κλάζματος μας έφερε ςτιν έβρεςι τυ ακερέυ απο ένα μέρος-τυ.

Ας κάνυμε κε άλο παράδιγμα διέρεςις.

2. Να βρεθι ο άγνοςτος παράγοντας απο το γινόμενο κε το γνοςτο παράγοντα. Το γινόμενο $\frac{3}{2}$. Ο γνοςτος παράγοντας $\frac{5}{9}$.

Λ ί ς ι. Ας παραςτίςυμε τον γνοςτο παράγοντα με το γράμα x. Θάχυμε:

$$\frac{5}{9} \cdot x = \frac{3}{2}.$$

Ζιτόντας να βρύμε το όλο απο το μέρος, βρίςκυμε:

$$x = \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 5} = \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}.$$

Λίνοντας το παράδιγμα αφτο, εχτελέςαμε κε πάλι διέρεςι, επιδι βρίκαμε τον άγνοςτο παράγοντα x, κςέροντας το γινόμενο $\frac{3}{2}$ κε τον άλον παράγοντα $\frac{5}{9}$.

Γραφι τις λίςις: $\frac{3}{2} : \frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 5} = \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}$.

Ζιτόντας τον ακέρεο απο το μέρος-τυ, βρίςκυμε τον άγνοςτο παράγοντα απο το γινόμενο κε τον γνοςτο κλαζματικο παράγοντα, κάνομε πράκςι αντίςτροφι με τον πολαπλαςιαζμο, διλ. διέρεςι. Στα παραδίγματά-μας, αφτο ίτανε διέρεςι δια κλάζματος.

3. Να βρεθι το x, αν $\frac{3}{4}x = \frac{15}{2}$.

Λ ί ς ι. Για να βρύμε το x πρέπι να κάνυμε διέρεςι:

$$x = \frac{15}{2} : \frac{3}{4},$$

πράγμα, πυ ίνε το ίδιο, να βρεθι το x απο τα μέρι-τυ. Ι τελεφτέα πράκςι δίνι:

$$x = \frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 10.$$

Αντι να διερέςυμε τον $\frac{15}{2}$ δια $\frac{3}{4}$, εκτελύμε πολαπλαςιαζμο $\frac{15}{2} \cdot \frac{4}{3}$. ο πολαπλαςιαζμος δίνι το ίδιο εκςαγόμενο:

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{4}{3} = 10.$$

Σ μ ί ο ς ι. Ι διέρεςι δια κλάζματος κε ο πολαπλαςιαζμος επι κλάζμα αντίςτροφο τυ διερέτι, δίνυν τα ίδια εκςαγόμενα.

4. Να γίνι ι διέρεςι $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$.

Λ ί ς ι. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = x, \quad \frac{5}{7}x = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$.

Αν αντικαταςτίςυμε τι διέρεςι με πολαπλαςιαζμο επι κλάζμα, αντίςτροφο με το διερέτι, θα έχυμε: $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$. Ι απάντιςι ίνε ι ίδια.

Για να διερέςυμε έναν οπιοδίποτε αριθμο δια κλάζματος, πρέπι να τον πολαπλαςιάςυμε επι αριθμο, πυ να ίνε αντίςτροφος με το διερέτι.

Γραφι με τα γράματα: $\frac{a}{b} : \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{q}{p} = \frac{a \cdot q}{b \cdot p}$.

§ 3. Διέρεσι οπιονδίποτε ακέρεον κε κλαζματικον αριθμον.

1. Να βρεθι το πιλίκο $\frac{12}{49}:\frac{4}{7}$.

Λίσι. $\frac{12}{49}:\frac{4}{7}=\frac{12}{49}\cdot\frac{7}{4}=\frac{12\cdot7}{49\cdot4}=\frac{3}{7}$.

2. Να βρεθι το πιλίκο: $\frac{3}{4}:6=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3\cdot1}{4\cdot6}=\frac{1}{8}$.

3. Να βρεθι το πιλίκο: $6:\frac{3}{4}=6\cdot\frac{4}{3}=8$.

4. Να βρεθι το πιλίκο: $8\frac{1}{3}:1\frac{3}{4}$.

Λίσι. Εδο έχυμε περίπτοσι διέρεσις μιχτον αριθμον. Προτυ να αρχίσυμε τι διέρεσι, πρέπι να τρέπσυμε το διερετέο κε το διερέτι σε καταχριστικα κλάζματα:

$$8\frac{1}{3}:1\frac{3}{4}=\frac{25}{3}:\frac{7}{4}=\frac{25\cdot4}{3\cdot7}=\frac{100}{21}=4\frac{16}{21}.$$

5. Να βρεθι $\frac{2}{5}:\frac{3}{5}$. Λίσι $\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=\frac{2\cdot5}{5\cdot3}=\frac{2}{3}$.

Στο τελεφτέο παράδιγμα διερέσαμε κλάζματα ομόνιμα. Το ίδιο εχσαγόμενο θα έχυμε, αν διερέσυμε αμέσος τυς αριθμιτες, χορις να πάρυμε ιπ' όπσιν τυς ίσυς παρονομαστες.

I. Οταν έχυμε να διερέσυμε μιχτυς αριθμυς, ίνε ανάνκι τυς μιχτυς αριθμυς να τυς τρέπσυμε σε καταχριστικα κλάζματα.

II. Οταν έχυμε να διερέσυμε διο ομόνιμα κλάζματα, πρέπι να διερέσυμε μονάχα τυς αριθμιτες παραλίποντας τυς παρονομαστες αφτον τον κλαζμάτον.

III. Οταν έχυμε να διερέσυμε κλάζμα δι' ακερέυ αριθμυ, πρέπι να πολαπλασιάσυμε επι τον ακέρεο τον παρονομαστι τυ κλάζματος, χορις να αλάχσυμε τον αριθμιτι.

Σιμίοσι. Πριν απ' τον τελικο πολαπλασιαζμο πρέπι να κάνυμε απλοπίισι στο κλαζματικο εχσαγόμενο, πυ βρίσκυμε.

6. $\frac{12}{25}:\frac{4}{5}=\frac{12\cdot5}{25\cdot4}=\frac{3\cdot1}{5\cdot1}=\frac{3}{5}$.   7. $\frac{8}{9}:\frac{4}{3}=\frac{8\cdot3}{9\cdot4}=\frac{2\cdot1}{3\cdot1}=\frac{2}{3}$.

§ 4. Προβλίματα, πυ λίνοντε με τι διέρεσι.

Σιχνα κάναμε διέρεσι κατα τι λίσι διαφόρον προβλιμάτον. Μα μονάχα τόρα, όταν μάθαμε να διερύμε κλάζματα, μπορύμε να ιποδίχσυμε όλες τις περιπτόσις, στις οπίες χρισιμοπιύμε τι διέρεσι, όταν έχυμε να λίσυμε προβλίματα.

Ενα απο τα κιριότερα προβλίματα, πυ λίνοντε με διέρεσι, ίνε κε το πρόβλιμα τις έβρεσις εκίνυ τυ αριθμυ, τον οπίον παραδέχοντε για ακέρεο, σίμφονα με το δομένον αριθμο, πυ ίνε μεγαλίτερος ί μικρότερος τυ ακερέυ.

Ι έβρεσι τυ ακερέυ απο το δομένο μέρος-τυ λίνετε με τι διέρεσι.

Ας απαριθμίσυμε τόρα όλα τα προβλίματα, τα οπία λίνυμε με τι διέρεσι.

1. Απ' το γινόμενο διο παραγόντον κε έναν απ' αφτυς να βρεθι ο άλος παράγοντας.
2. Να διερεθι ο αριθμος σε κάμποσα ίσα μέρι (διέρεσι δια ακερέυ).
3. Να βρεθι ο ακέρεος, όταν δίνετε ένα μέρος-τυ κε ο αριθμος, πυ δίχνι πιό μέρος τυ ακερέυ ίνε αφτο.
4. Να σινκριθυν δίο αριθμι. Να μάθυμε, κατα πόσες φορες ο ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος ίτε μικρότερος τυ άλυ, ίτε πιό μέρος ενος αριθμυ αποτελι ο άλος αριθμος (να βρύμε το λόγο τον αριθμον).

Ας σταματίσυμε ακόμα στο τελεφτέο ζίτιμα.

1. Θέλυμε να μάθυμε, πιό μέρος τυ 30 αποτελι το 5.

Το πρόβλιμα μπορύμε να το λίσυμε έτσι: ας μάθυμε, πόσες φορες το 5 περιέχετε στο 30· γι' αφτο διερύμε το 30 δια τυ 5 κε βρίσκυμε το εχσαγόμενο: 6 φορες.

Αποδο σιμπερένυμε, πος το 5 αποτελι το $\frac{1}{6}$ τυ 30.

Το ίδιο πρόβλιμα μπορύμε να το λίσυμε με τι διέρεσι τυ 5 δια 30 κε θα έχυμε:

$$5:30=\frac{1}{6}.$$

2. Ενα αφτοκίνιτο μπορι να κυβαλίσι $1\frac{1}{2}$ **τ** φορτίο. Μα κυβαλάι μονάχα $1\frac{1}{4}$ **τ.** Πόσο μέρος τις ολικις φορτοτικίς-τυ δίναμις πίρε το αφτοκίνιτο;

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα λίνετε με τι διέρεςι:

$$1\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}=\frac{5}{4}:\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{5}{6}.$$

Πρέπι να κάνυμε ακόμα μια ςπυδέα παρατίριςι για τι λίςι τον προβλιμάτον με τι βοίθια τις διέρεςις. Ας εκςετάςυμε όμος προτίτερα διο παραδίγματα.

3. Για $4\frac{1}{2}$ **χγ** ζάχαρι πλιρόςανε $7\frac{7}{8}$ ρύβλ. Πόςο ακςίζι το χιλιόγραμο;

Λ ί ς ι. $7\frac{7}{8}:4\frac{1}{2}=\frac{63}{8}:\frac{9}{2}=\frac{63\cdot 2}{8\cdot 9}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ τυ ρυβλίυ.

Εδο το πιλίκο ίνε μικρότερο τυ διερετέυ.

4. Για $\frac{3}{4}$ **μ** λαςτιχένιυ ςολίνα πλιρόςανε $1\frac{1}{2}$ ρύβλ. Πόςο ακςίζι 1 **μ** τυ ςολίνα τύτυ;

Λ ί ς ι. $1\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{3}{2}:\frac{3}{4}=2$ ρύβλια.

Εδο το πιλίκο ίνε μεγαλίτερο τυ διερετέυ.

5. Ας ςινκρίνυμε αναμετακςί-τυς τα ακόλυθα πιλίκα:

$12:3=4$ (το πιλίκο ίνε μικρότερο τυ διερετέυ),
$12:1=12$ (το πιλίκο ίνε ίςο με τον διερετέο),
$12:\frac{1}{2}=24$ (το πιλίκο ίνε μεγαλίτερο τυ διερετέυ).

Σ ι μ ί ο ς ι. Κατα τι διέρεςι δια κίριυ κλάζματος βρίςκυμε πιλίκο μεγαλίτερο τυ διερετέυ. Κατα τιν διέρεςι δι' ακέρευ αριθμυ, πυ ίνε μεγαλίτερος τις μονάδας, ίτε κατα τι διέρεςι δια καταχριςτικυ κλάζματος το πιλίκο ίνε μικρότερο τυ διερετέυ.

§ 5. Ι κανόνες πρόςθεςις κε πολαπλαςιαζμυ ιςχίυν κε για τυς κλαζματικυς αριθμυς.

Επιδι ι πρόςθεςι κε ο πολαπλαςιαζμος τον κλαζματικον αριθμον καταλίγι, όπος έχυμε δι, ςτιν πρόςθεςι κε ςτον πολαπλαςιαζμο τον ακέρεον αριθμον, γι' αφτο ι βαςικι νόμι τις πρόςθεςις κε τυ πολαπλαςιαζμυ, πυ επαλιθέβυν για τυς ακέρευς αριθμυς, ιςχίυν κε για τυς κλαζματικυς αριθμυς. Αφτο μπορύμε να το εκςελένκςυμε πάνο ςε παραδίγματα.

§ 6. Πιο πολίπλοκο παράδιγμα πράκςις με κλαζματικυς αριθμυς.

Π α ρ ά δ ι γ μ α. Ας κάνυμε τιν πράκςι τις παράςταςις με γράματα:

$$H=\frac{6p}{abc},\ p=30\frac{2}{3},\ a=3\frac{6}{7},\ b=5\frac{4}{9},\ c=\frac{76}{10}.$$

Λ ί ς ι. Αντικαταςτένυμε τιν αριθμιτικι τιμι τον γραμάτον,

$$H=\frac{6\cdot 30\frac{2}{3}}{3\frac{6}{7}\cdot 5\frac{4}{9}\cdot\frac{76}{10}}.$$

Τρέπυμε τυς μιχτυς ςε καταχριςτικα κλάζματα.

$$H=\frac{6\cdot\frac{92}{3}}{\frac{27}{7}\cdot\frac{49}{9}\cdot\frac{76}{10}}.$$

Εχτελύμε τις πράκςις.

Γράφυμε χοριςτα το διερετέο $\frac{6\cdot 92}{3}$. Τι διέρεςι αφτυ τυ κλάζματος με όλυς τυς άλυς αριθμυς τιν αντικαταςτένυμε με πολαπλαςιαζμο επι τυς αντίθετυς αριθμυς:

$$\frac{6\cdot 92\cdot 7\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 27\cdot 49\cdot 76}.$$

Απλοπιύμε:

$$\frac{6\cdot 92\cdot 7\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 27\cdot 49\cdot 76}=\frac{46\cdot 10}{3\cdot 7\cdot 19}=\frac{460}{399}=1\frac{61}{399}.$$

Σ ι μ ί ο ς ι. Όταν κάνυμε τις πράκςις, πρέπι πάντα να αρκετύμε με μια γραμι τυ κλάζματος, αντικαταςτένοντας τυς κλαζματικυς αριθμυς ςτον αριθμιτι κε ςτον παρονομαςτι με αριθμυς, πυ περιέχυν ςτον αριθμιτι κε ςτον παρονομαςτι μονάχα ακέρευς αριθμυς.

XII. ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

§ 1. Απανκελία κε γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

Ο τρόπος, με τον οπίο εμις απανκέλυμε κε γράφυμε τυς ακέρευς αριθμυς, ονομάζετε **δεκαδικο ςίςτιμα αρίθμιςις**, επιδι κάθε μονάδα τις ανότερις τάκςις ςτο ςίςτιμα αφτο περιέχι 10 μονάδες τις γιτονικις κατότερις τάκςις: ι μια χιλιάδα ίνε 10 φορες μεγαλίτερι απο τιν εκατοντάδα, ι εκατοντάδα ίνε 10 φορες

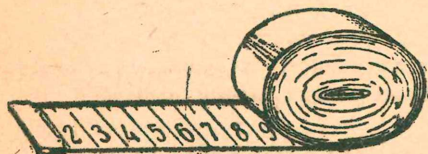
μεγαλίτερι τις δεκάδας, ι δεκάδα δέκα φορες μεγαλίτερι τις μονάδας, τιν οπία ονομάζυμε **απλι μονάδα**. Τον τρόπο αφτο τυ ςχιματιζμυ τον μονάδον ςτυς λογαριαζμύς-μας, μπορύμε να τον επεχτίνυμε κε ςε κάμποςυς κλαζματικυς αριθμυς μικρότερυς απο τι μονάδα—ςτα ονομαζόμενα δεκαδικα κλάζματα.

Οριζμος. Δεκαδικο κλάζμα ονομάζετε ο κλαζματικος αριθμος, τυ οπίυ παρονομαςτις ίνε ο αριθμος 10, ίτε ι δίναμι τυ αριθμυ 10.

Ι κλαζματικι αριθμι: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{23}{100}$ ίνε δεκαδικα κλάζματα· έτςι το δεκαδικο κλάζμα ίνε μια περίπτοςι τυ ςενεθιζμένυ (απλυ) κλάζματος.

Ας πάρυμε το μέτρο (ςχ. 5), ιποδιερεμένο ςε ςαντίμετρα. Ας παραδεχτύμε το μέτρο για μονάδα.

Διερόντας τι μονάδα ςε 10 μέρι, βρίςκυμε το ένα δέκατο τις μονάδας: $\frac{1}{10}$· διερόντας το δέκατο ςε δέκα ίςα μέρι, βρίςκυμε το εκατοςτο τις μονάδας: $\frac{1}{100}$. Παρατιρύμε, πος τα δεκαδικα κλάζματα έχυν τιν ίδια ςχέςι με το δεκαδικο ςίςτιμα τις αρίθμιςις. Αφτο οδίγιςε τυς ανθρόπυς ςτι ςκέψι, πος μπορύνε τα μέρι αφτα να τα γράψυνε χορις παρονομαςτι, κε μαλιςτα, ι τιμι κε ι ονομαςία κάθε δεκαδικυ κλάζματος ορίζετε απο τι θέςι, πυ πιάνι ο αντίςτιχος αριθμος.



Σχ. 5.

Απο τις ιδιότιτες τυ δεκαδικυ ςιςτίματος ςιμπεραίνυμε, πος τα δεκαδικα μέρι πρέπι να βρίςκοντε δίπλα κε ςτα δεξια τις μονάδας, επιδι το ένα δέκατο ίνε 10 φορες μικρότερο απο τι μονάδα.

Μένι μονάχα να χορίςυμε το ακέρεο μέρος τυ αριθμυ απο το κλαζματικο. Αφτο γίνετε με τι βοίθια τις ιποδιαςτολις.

Σίμφονα μ' αφτον τον τρόπο ας γράψυμε ένα παράδιγμα, τέςερυς ακέρευς κε οχτο δέκατα: $4\frac{8}{10} = 4{,}8$.

Αν θα θέλαμε να γράψυμε ςτο δεκαδικο ςίςτιμα αριθμο, πυ περιέχι κε εκατοςτα μέρι, τότε θα ίταν ανάνκι τα εκατοςτα να

τα γράψυμε δίπλα κε δεξια ςτα δέκατα. Ετςι λιπον τα δέκατα μέρι θα πιάςυν τιν πρότι θέςι ςτα δεξια ίςτερα απο τιν ιποδιαςτολι, πυ χορίζι τις τάξις τον ακέρεον μονάδον απ' τις τάξις τον κλαζματικον μονάδον, κε τα εκατοςτα θα πιάςυν τι δέφτερι θέςι ςτα δεξια απ' τιν ιποδιαςτολι. Π.χ.:

$$4\frac{83}{100} = 4{,}83.$$

Με τον ίδιο τρόπο εξακολυθυν τι γραφι τον χιλιοςτον, δεκάκις χιλιοςτον κε τον άλον πιο μικρον δεκαδικον μερον τις μονάδας.

Για τιν αντικατάςταςι τις θέςις τον μονάδον, πυ λίπυν, χριςιμοπιύμε ςτο δεκαδικο ςίςτιμα το μιδενικο, πυ το βάζυμε ςτι θέςι τις αντίςτιχις τάξις. Ετςι χριςιμοπιύμε το μιδενικο κε κατα τι γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

Παραδίγματος χάριν, κατα τι γραφι τυ κίριυ κλάζματος, βάζυμε μιδενικο ςτι θέςι τον ακέρεον μονάδον. Διλ. γράφυμε 0,3 αντις τυ κλάζματος $\frac{3}{10}$.

Ας δόςυμε παραδίγματα τις χριςιμοπίιςις τυ μιδενικυ κατα τι γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον:

$\frac{1}{10} = 0{,}1.$ $\frac{5}{10} = 0{,}5.$ $\frac{1}{100} = 0{,}01.$ $\frac{7}{100} = 0{,}07,$ $\frac{28}{100} = 0{,}28.$

$\frac{1}{1000} = 0{,}001.$ $\frac{4}{1000} = 0{,}004,$ $\frac{29}{1000} = 0{,}029.$

$\frac{156}{1000} = 0{,}156.$ $\frac{703}{1000} = 0{,}703,$ $205\frac{402}{1000} = 205{,}402.$

Ας ςινοψίςυμε όλυς τυς κανόνες τις παράςταςις τον δεκαδικον κλαζμάτον:

Κατα τι γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον χορίζυν με ιποδιαςτολι το ακέρεο μέρος απο το κλαζματικο. Αν ι ακέρεες μονάδες λίπυν, τότε ςτι θέςι-τυς βάζυν μιδενικο. Τα ψιφία, πυ παραςτένυν τυς αριθμυς τον δεκάτον, τα γράφυν ςτιν πρότι θέςι ςτα δεξια τις ιποδιαςτολις, τα ψιφία τον εκατοςτον τα γράφυν ςτι δέφτερι θέςι, τον χιλιοςτον ςτιν τρίτι κ.υ.κ.

Ξέροντας να γράψυμε τα δεκαδικα κλάζματα, μπορύμε κε να τα απανκέλυμε: λ.χ. απανκέλυμε:

0,1 — ένα δέκατο, 0,01 — ένα εκατοστο,
0,001 — ένα χιλιοστο, 0,2 — δίο δέκατα,
0,03 — τρία εκατοστα, 0,25 — ίκοσι πέντε εκατοστα,
0,007, — εφτα χιλιοστα, 0,023 — ίκοσι τρία χιλιοστα,
0,271 — διακόσια εβδομίντα ένα χιλιοστα,
52,325 — πενίντα δίο ακέρεα κε τριακόσια ικοσιπέντε χιλιοστα.

Κατα τιν απανκελία τυ δεκαδικυ κλάζματος ο αριθμος, πυ βρίςκετε μετα τιν ιποδιαςτολι, διαβάζετε ςαν αριθμιτις. Στον παρονομαςτι διαβάζετε ο αριθμος, πυ παραςτένετε με τι μονάδα κε τόςα μιδενικα, όςα ψιφία ιπάρχυνε μετα τιν ιποδιαςτολι.

§ 2. Το δεκαδικο κλάζμα ος απλο κλάζμα.

Ι ιδιότιτες τον δεκαδικον κλαζμάτον κε ι τρόπι τις απανκελίας κε τις γραφίς-τυς, ςε μερικες περιπτόςις μας ανανκάζυν να προτιμίςυμε περιςότερο τα δεκαδικα κλάζματα απο τα απλα. Νά, π.χ., όταν έχυμε να κάνυμε λογαριαςμυς ςτο μετρικο ςίςτιμα, τα δεκαδικα κλάζματα απλυςτέβυν τιν γραφι. Αντις να γράψυμε 4 **χγ** 287 **γ**, γράφυμε: 4,287 **χγ**.

Μαθένοντας τα κλάζματα, θα γνοριςτύμε κε με τις άλες περιπτόςις, ςτις οπίες ίνε καταλιλότερο να χριςιμοπιίςυμε τα δεκαδικα κλάζματα αντι τον απλον.

Οςτόςο, ςινατύμε κε τέτιες περιπτόςις, όταν τα απλα κλάζματα ίνε πιο κατάλιλα απο τα δεκαδικα. Τα απλα κλάζματα έχυν μια ιδιότιτα, ι οπία μονάχα ςε ελάχιςτες περιπτόςις μπορι να εφαρμοςθι κε ςτα δεκαδικα, — μας επιτρέπυν να κάνυμε απλοπίςι. Π.χ. το κλάζμα 0,125 αν το γράψυμε με μορφι απλυ κλάζματος έχι πολι απλι μορφι:

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

Το δεκαδικο κλάζμα, αν ίνε ανάνκι, μπορύμε να το τρέψυμε ςε απλο κλάζμα κε το αντίθετο.

§ 3. Σίνκριςι τυ μεγέθυς τον δεκαδικον κλαζμάτον κε ςτρονκίλεμα τον αριθμον, πυ παραςτένυν δεκαδικα κλάζματα.

1. Οταν εργάζοντε ςτον τόρνο, ςιχνα ςιμβένι να αλάζυν τον αριθμο τον ςτροφον τυ τροχυ κε τιν ταχίτιτα τις κίνιςις τυ λυριυ. Ι ταχίτιτα τυ λυριυ δίχνι, κατα πόςα μέτρα ςτο δεφτερόλεφτο μετακινίτε ι τενία πάνο ςτον τροχοφόρο άξονα.

Ας ιποθέςυμε πος, ο τόρνος έχι 4 ταχίτιτες τυ λυριυ: 7,32 **μ** ςτο δεφτερόλεφτο· 5,5 **μ**· 4,4 **μ** κε 4,2 **μ** ςτο δεφτερόλεφτο. Ας ςινκρίνυμε αφτυς τυς αριθμυς. Πιά ταχίτιτα ίνε ι μεγαλίτερι κε πιά ι μικρότερι;

Ας βάλυμε αφτυς τυ αριθμυς κατα τιν κατιύςα τυ μεγέθυς-τυς.

$$7{,}32 > 5{,}5 > 4{,}4 > 4{,}2.$$

Ο αριθμος 7,32 ίνε μεγαλίτερος όλον τον άλον αριθμον, γιατι ι 7 μονάδες ίνε περιςότερες απο κάθε άλο αριθμο τις ςιρας, πυ έχι μόνο 5 ίτε 4 ακέρεες μονάδες, όςο κι αν ίνε πολα τα άλα μέρι τις μονάδας-τυ. Για τιν ίδια ετία το 5,5 ίνε μεγαλίτερο, παρα το 4,4 κε το 4,2.

Ι τελεφτέι διο αριθμι τις προιγύμενις ςιρας έχυν τον ίδιο αριθμο ακέρεον μονάδον, αλα ο αριθμος 4,4 ίνε μεγαλίτερος απο το 4,2 επιδι έχοντας ίςο το ακέρεο μέρος-τυ, έχι περιςότερα δέκατα απ' τα δέκατα τυ δέφτερυ.

Με τον ίδιο τρόπο ςινκρίνυν κε τα δεκαδικα κλάζματα, πυ έχυν περιςότερα ψιφία μετα τιν ιποδιαςτολι.

Ετςι λιπον, για να ςινκρίνυμε διο αριθμυς, πυ περιέχυν δεκαδικα κλάζματα, πρέπι να ςινκρίνυμε τις ακέρεες μονάδες-τυς. Μεγαλίτερος ίνε εκίνος ο αριθμος, τυ οπίυ το ακέρεο μέρος ίνε μεγαλίτερο. Αν ο αριθμος τον ακέρεον μονάδον ςτυς αριθμυς, πυ ςινκρίνυμε, ίνε ο ίδιος, τότε πρέπι να ςινκρίνυμε τα δέκατα, πυ έχι. Εκίνος ο αριθμος, πυ έχι μεγαλίτερο αριθμο ςτα δέκατά-τυ, θα ίνε κε ο μεγαλίτερος. Αν όμος κε ο αριθμος τον ψιφίον-τυς τον δέκατον ίνε ίδιος, τότε ςινκρίνυν τα εκατοςτά-τυς κ.τ.λ.

2. Ας ςινκρίνυμε τυς αριθμυς: 0,2 , 0,3 , 0,5.

Τα κλάζματα αφτα μονάδες δεν έχυν. Μεγαλίτερο θα ίνε εκίνο, πυ έχι περιςότερα δέκατα.

Ας τα βάλυμε ςτι ςιρα ςίμφονα με το μέγεθός-τυς:

$$0{,}5 > 0{,}3 > 0{,}2.$$

3. Ας ςινκρίνυμε τυς αριθμυς: 0,531, 0,582, 0,594.

Παρατιρύμε, πος ι αριθμι αφτι δεν έχυν ακέρεες μονάδες, πος όλι-τυς έχυν ίςο αριθμο δέκατον κε πος διακρίνοντε απο τα εκατοςτά-τυς. Ινε φανερο, πος μεγαλίτερος ίνε εκίνος, πυ έχι τον μεγαλίτερο αριθμο ςτα εκατοςτά-τυ:

$$0{,}594 > 0{,}582 > 0{,}531.$$

Κατα τιν ςίνκριςι τον αριθμον, πυ παραςτίθιχαν με δεκαδικα κλάζματα, ςιχνα αντικαταςτένυμε τυς δομένυς αριθμυς με τυς αντίςτιχυς μ' αφτυς κατα προςένκιςι, ίτε ςτρονκιλεμένυς αριθμυς.

Για το ςτρονκίλεμα τον δεκαδικον κλαζμάτον χριςιμοπιύμε κίνυς τυς τρόπυς, πυ ίχαμε εφαρμόςι νορίτερα για το ςτρονκίλεμα τον ακέρεον αριθμον (κεφ. III, § 16).

Ας δόςυμε παραδίγματα ςτρονκιλέματος.

Δομένος αριθμος.	Αριθμος κατα προςένκιςι
0,3758	0,38 ςτρονκιλεμένος ςε εκατοςτα
0,3724	0,37 " " "
0,625	0,63 " " "
0,635	0,64 " " "

§ 4. Τροπι τον δεκαδικον κλαζμάτον ςε ομόνιμα κε απλοπίιςι τυ δεκαδικυ κλάζματος.

1. Να παραςταθι με μερίδια τυ χιλιόμετρυ το μάκρος 300 **μμ.**

Λίςι. Κςέρυμε, πος το 1 **χμ** = 1000 **μ** = = (1000 · 1000) **μμ** = 1 000 000 **μμ.** Για να βρύμε πιό μέρος αποτελύνε τα 300 **μμ,** αν για ακέρεο παραδεχόμαςτε 1 000 000 **μμ,** πρέπι να κάνυμε διέρεςι.

Για να γράπςυμε τιν απάντιςι ος δεκαδικο κλάζμα θάχυμε:

$$\frac{300}{1\,000\,000} = 0{,}000\,300.$$

Αν κάνυμε απλοπίιςι αφτυ τυ κλάζματος, πριν να το γράπςυμε ος δεκαδικο, χριςιμοπιόντας τιν κιριότερι ιδιότιτά-τυ, θα έχυμε:

$$\frac{300}{1\,000\,000} = \frac{3}{10\,000} = 0{,}0003.$$

Τα κλάζατα 0, 000300 κε 0,0003 ίνε ίςα.

$0{,}000300 = 0{,}0003$. Το δέφτερο δεκαδικο κλάζμα έχι πιο απλι μορφι.

2. Ας ςινκρίνυμε τυς αριθμυς: 2,8, 2,80, 2,800.

Ι αριθμι αφτι έχυν τον ίδιο ακέρεο αριθμο, κε τον ίδιο αριθμο δέκατον. Αλα μέρι δεν έχυν. Οςτε ίνε ίςι:

$$2{,}8 = 2{,}80 = 2{,}800.$$

Αν θα παραςτίςυμε τα δεκαδικα αφτα κλάζματα με μορφι απλον κλαζμάτον θάχυμε:

$$2\frac{8}{10} = 2\frac{80}{100} = 2\frac{800}{1000},$$

τα κλάζματα ίνε ίςα ςίμφονα με τιν κιριότερι ιδιότιτα τον απλον κλαζμάτον.

Οταν γράφυμε μιδενικα ςτο τέλος τυ δεκαδικυ αριθμυ, αλάζυμε μονάχα τι μορφί-τυ, ενο το μέγεθός-τυ δεν αλάζι. Ινε ςοςτο κε το αντίθετο: εκςαλίφοντας μιδενικα μετα τιν ιποδιαςτολι απο το τέλος τυ δεκαδικυ αριθμυ, δεν αλάζομε το μέγεθος τυ κλάζματος.

Χάρις ς' αφτο, μπορύμε να παραςτένυμε τα δεκαδικα κλάζματα με κλάζματα τις ίδιας ονομαςίας, διλ. να τρέπςυμε τα δεκαδικα κλάζματα ςε ομόνιμα.

3. Να τραπυν ςε ομόνιμα τα κλάζματα: 0,25, 0,1732, 3,154.

Λίςι.

$$0{,}25 = 0{,}2500, \quad 0{,}1732 = 0{,}1732, \quad 3{,}154 = 3{,}1540.$$

Στο παράδιγμα αφτο όλυς τυς αριθμυς τυς παραςτίςαμε με δεκάκις χιλιοςτα.

I. Για να τρέπςυμε κάμποςα δεκαδικα κλάζματα ςε ομόνιμα, πρέπι να εκςιςόςυμε τον αριθμο τον πςιφίον-τυς μετα τιν ιποδιαςτολι ς' όλα τα δομένα κλάζματα, γράφοντας απ' τα δεκςια ςτο τέλος-τυς μιδενικα.

Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος, πυ εφαρμόζετε ςτα δεκαδικα κλάζματα, μας επιτρέπι επίςις να απλοπιίςυμε τα δεκαδικα κλάατα, αν έχυν μιδενικα ςτο τέλος-τυς μετα τιν ιποδιαςτολι. Ι τιμι τυ κλάζματος απ' αφτο δεν αλάζι.

Ας απλοπίσυμε το κλάζμα 0,8700 μ:

$$0{,}8700 = \frac{8700}{10\,000} = \frac{87}{100} = 0{,}87 \text{ μ}.$$

II. Αν το δεκαδικο κλάζμα έχι ςτο τέλος μιδενικα, τότε αφτα τα μιδενικα μπορύμε να τα παραλίπςυμε. Ι ακςία τυ κλάζματος απ' αφτο δεν αλάζι.

Τον τελεφτέο μετασχιματιζμο μπορύμε να τον ονομάσυμε απλοπίισι τυ κλάζματος.

§ 5. Πρόςθεςι κε αφέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

1. Να προςτεθύνε ι αριθμι 3,75 + 8 + + 4,125.

Τι λίσι μπορύμε να τι γράπςυμε με δίο τρόπυς:

$$\begin{array}{r} 3,750 \\ +\,8,000 \\ 4,125 \\ \hline 15,875 \end{array} \quad \text{ίτε} \quad \begin{array}{r} 3,75 \\ +\,8 \\ 4,125 \\ \hline 15,875 \end{array}.$$

Στιν πρότι περίπτοςι τρέπςαμε όλα τα κλάζματα ςε ομόνιμα, γράφοντας ςτο τέλος-τυς μιδενικα κε παραςτένοντας τα κλάζματα με χιλιοςτα.

2. Ας κάνυμε αφέρεςι: 4,875 — 2,37264.

Λ ί ς ι.

$$\begin{array}{r} 4,87500 \\ -\,2,37264 \\ \hline 2,50236 \end{array} \quad \text{ίτε} \quad \begin{array}{r} 4,875 \\ -\,2,37264 \\ \hline 2,50236 \end{array}.$$

Τιν πρόςθεςι κε τιν αφέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον τις κάνυν έτςι, όπος κε ςτυς ακέρευς αριθμυς.

Για να προςθέςυμε ίτε να αφερέςυμε δεκαδικα κλάζματα πρέπι:

1) να γράπςυμε τυς αριθμυς τον ένα κάτο απ' τον άλο έτςι, όςτε ι ακέρεες μονάδες να βρίςκυντε κάτο απ' τις ακέρεες, τα δέκατα κάτο απο τα δέκατα, τα εκατοςτα κάτο απο τα εκατοςτα κ.υ.κ.

2) Να κάνυμε τιν πρόςθεςι ίτε τιν αφέρεςι, όπος κάνυμε με τυς ακέρευς αριθμυς.

3) Στο εκςαγόμενο βάζυμε τιν ιποδιαςτολι, ςε

κίνι τι θέςι, τιν οπία έχι ςτυς δομένυς για τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι αριθμυς.

Σ ι μ ί ο ς ι. Οταν γράφυμε τα κλάζματα ςτιν πρόςθεςι κε αφέρεςι, πρέπι να προςέχςυμε, όςτε όλες ι ιποδιαςτολες να βρεθυν ι μια κάτο απ' τιν άλι.

Ας δόςυμε προςοχι ςτιν ακόλυθι περίπτοςι τις αφέρεςις:

3. 1 — 0,027564 = 0,972436.

Εδο τυς αριθμυς όλον τον τάκςεον τυς αφερυν απ' το 9, εχτος τον τελεφτέο, τον οπίο αφερυν απ' το 10.

4. Σιχνα ςιμβένι κατα τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον να βρίςκυμε το άθριζμα ί τι διαφορα κατα προςένκιςι. Να βρεθι το άθριζμα κε ι διαφορα με ακρίβια ενος εκατοςτυ:

1) 8,5434 + 2,271 + 3,186 + 2,05, 2) 12,3764 — 5,171.

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα μας λέι, πος πρέπι να ςτρονκιλέπςυμε το εκςαγόμενο ςτα πςιφία τον εκατοςτον παραλίποντας όλες τις ιπόλιπες τάκςις απ' τα δεκςια.

$$1)\quad \begin{array}{r} 8,5434 \\ +\,2,271 \\ 3,186 \\ 2,05 \\ \hline 16,05 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} 12,3764 \\ -\,5,171 \\ \hline 7,21 \end{array}$$

Ι κανόνες τυ ςτρονκιλέματος τον δεκαδικον κλαζμάτον μένυν ι ίδιι, όπος κε για τυς ακέρευς αριθμυς (κίτα ςτι ςελίδα 30).

§ 6. Πολαπλαςιαζμος δεκαδικον κλαζμάτον.

1. Π ο λ α π λ α ς ι α ζ μ ο ς ε π ι 10 κ ε τι δ ί ν α μ ι τ υ α ρ ι θ μ υ 10.

1. Αν ςινκρίνυμε τυς αριθμυς: 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1, 1, ίτε 0,00097, 0,0097, 0,097, 0,97, 9,7, 97, θα δύμε πος κάθε αριθμος, πυ ακολυθα, ίνε 10 φορες μεγαλίτερος απο τον προιγύμενό-τυ ίτε κάθε προιγύμενος αριθμος, πολαπλαςιαζόμενος επι 10 δίνι τον ακόλυθό-τυ αριθμο, κε τυναντίο, κάθε ακόλυθος αριθμος, διερύμενος δια 10, δίνι τον προιγύμενό-τυ.

Απο όςα ίπαμε φένετε, πος για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο

κλάζμα επι 10 αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτα δεκςια κατα ένα πςιφίο:

2. 1) $84,72 \cdot 10 = 847,2$, 3) $3,2 \cdot 10 = 32$,

2) $0,0271 \cdot 10 = 0,271$, 4) $0,512 \cdot 10 = 5,12$.

Για να διερέςυμε δεκαδικο κλάζμα δια 10 αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτα αριςτερα κατα ένα πςιφίο.

3. 1) $84,7 : 10 = 8,47$, 3) $0,42 : 10 = 0,042$,

2) $3,45 : 10 = 0,345$, 4) $0,056 : 10 = 0,0056$.

Τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι επι 100, 1000 κ. τ. λ. τα αντικαταςτένυν με διαδοχικυς πολαπλαςιαζμυς κε διερέςις με τον 10. Π. χ.:

4. Να πολαπλαςιαςτι ο αριθμος: $4,273 \cdot 100$.

Λ ί ς ι. $4,273 \cdot 100 = 4,273 \cdot 10 \cdot 10 = 42,73 \cdot 10 = 427,3$.

5. Να διερεθι: $35,68 : 100$.

Λ ί ς ι. $35,68 : 100 = 35,68 : 10 : 10 = 3,568 : 10 = 0,3568$.

I. Για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι αριθμο, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα, αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτα δεκςια κατα τόςα πςιφία, όςα μιδενικα ιπάρχυν ςτον πολαπλαςιαςτι.

II. Για να διερέςυμε δεκαδικο κλάζμα δια αριθμυ, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα, αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτ' αριςτερα κατα τόςα πςιφία, όςα μιδενικα ιπάρχυν ςτο διερέτι.

Σ ι μ ί ο ς ι. Κατα τι μεταφορα τις ιποδιαςτολις τα πςιφία, πυ δεν αρκυν, όπος ςτι διèρεςι έτςι κε ςτον πολαπλαςιαζμο αντικαταςτένοντε με μιδενικα.

Ας φέρυμε παραδίγματα:

6. $37,2 \cdot 1000 = 37\,200$.

Εδο τιν ιποδιαςτολι πρέπι να τι μεταφέρυμε κατα τρία πςιφία ςτα δεκςια. Δεν φτάνυν δίο πςιφία. Βάλαμε ςτι θέςι-τυς μιδενικα.

7. $0,25 : 100 = 0,0025$.

Εδο μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι κατα δίο πςιφία ςτα αριςτερα. Δεν φτάνυν δίο πςιφία. Βάλαμε ςτι θέςι-τυς μιδενικα.

Σ ι μ ί ο ς ι. Μεταφέροντας τιν ιποδιαςτολι ςτα δεκςια, αφκςàνυμε το δεκαδικο κλàζμα κατα 10, 100, 1000 κ. τ. λ. φορες. Μεταφέροντας τιν ιποδιαςτολι ςτ' αριςτερα, ελατόνυμε το δεκαδικο κλάζμα κατα 10, 100, 1000 φορες, ανàλογα με τον αριθμο τον πςιφίον, πυ έχι μεταφερθι ι ιποδιαςτολι.

1) $0,723 \cdot 100 = \frac{723}{1000} \cdot 100 = \frac{723 \cdot 100}{1000} = \frac{723}{10} = 72,3$.

2) $412,73 : 100 = \frac{41\,273}{100} : 100 = \frac{41\,273}{100 \cdot 100} = \frac{41\,273}{10\,000} = 4,1273$.

Πολαπλαςιαζμος δεκαδικυ αριθμυ επι ακέρεο.

Τον πολαπλαςιαζμο τυ δεκαδικυ αριθμυ επι ακέρεο τον κάνυμε πολαπλαςιάζοντας τα ςιμαντικα πςιφία τυ δεκαδικυ επι τον ακέρεο.

8. Να πολαπλαςιαςτι: $4,18 \cdot 7$.

Ας βρύμε το γινόμενο:

$$418 \cdot 7 = 2926.$$

Το εβριςκόμενο γινόμενο διαφέρι απο το ζιτύμενο, γιατι αντικαταςτένοντας τον αριθμο 4,18 με τον αριθμο 418, αφκςίςαμε 100 φορες τον πολαπλαςιαςτέο 4,18. Το γινόμενο επίςις αφκςίθικε 100 φορες. Γι' αφτο, για να βρύμε το ζιτύμενο γινόμενο, πρέπι να ελατόςυμε 100 φορες τον αριθμο 2926 κε θα βρύμε: $4,18 \cdot 7 = 29,26$.

Για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι ακέρεο, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τυς αριθμυς, μι δίνοντας προςοχι ςτιν ιποδιαςτολι, κε ςτο γινόμενο πρέπι να κςεχορίςυμε με τιν ιποδιαςτολι απ' τα δεκςια τόςα πςιφία, όςα ίςανε ίςτερα απο τιν ιποδιαςτολι ςτον κλαζματικο παράγοντα.

Το γινόμενο τυ $4,18 \cdot 7$ μπορύμε να το βρύμε κε με άλυς τρόπυς:

1) Πολαπλαςιάζυμε το 4,18 ςαν απλο κλάζμα:

$$4,18 \cdot 7 = \frac{418}{100} \cdot 7 = \frac{418 \cdot 7}{100} = \frac{2926}{100} = 29,26.$$

2) Αντικαταςτένυμε τον πολαπλαςιαζμο με τιν πρόςθεςι:

$$4,18 \cdot 7 = 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 = 29,26.$$

Ο πολαπλασιαςτέος ίχε δίο δεκαδικα πςιφία, ο πολαπλασιαςτις δεν ίχε διόλυ, κε το γινόμενο έχι επίςις δίο δεκαδικα πςιφία.

9. $3{,}2 \cdot 7 = 3\frac{2}{10} \cdot 7 = \frac{32 \cdot 7}{10} = \frac{224}{10} = 22{,}4.$

Ο πολαπλασιαςτέος ίχε ένα δεκαδικο πςιφίο, ο πολαπλασιαςτις ίνε ακὲρεος, το γινόμενο έχι ένα δεκαδικο πςιφίο.

Θα δόςυμε ακόμα παράδιγμα τυ πολαπλασιαζμυ τυ δεκαδικυ κλάζματος κε τυ ακέρευ με δεκαδικο κλάζμα επι ακέρεο.

10. $0{,}283 \cdot 25 = 7{,}075.$
11. $0{,}00538 \cdot 4307 = 23{,}17166.$
12. $0{,}02854 \cdot 3 = 0{,}08562.$
13. $14{,}805 \cdot 359 = 5314{,}995.$

Πολαπλαςιαζμος επι ακέρεο αριθμο, πυ τελιόνι ςε μιδενικα.

14. Να βρεθι το γινόμενο: 2,875 · 500.

$2{,}875 \cdot 500 = 2{,}875 \cdot 5 \cdot 100 = 14{,}375 \cdot 100 = 1437{,}5.$

Για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι αριθμο, πυ τελιόνι ςε μιδενικα, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον πολαπλαςιαςτέο επι το ςιμαντικο μέρος τυ πολαπλαςιαςτι κε έπιτα να μεταθέςυμε τιν ιποδιαςτολι ςτο εκςαγόμενο κατα τόςες θέςις προς τα δεξια, όςα μιδενικα ίχε ςτο τέλος ο πολαπλαςιαςτις.

Πολαπλαςιαζμος δεκαδικυ κλάζματος επι δεκαδικο κλάζμα.

15. Να βρεθι το γινόμενο 6,19 · 2,5. Ας ιποδίξυμε διο λίςις:

1) Τρέπυμε κε τυς διο αριθμυς ςε απλα κλάζματα.

$$6{,}19 \cdot 2{,}5 = \frac{619}{100} \cdot \frac{25}{10} = \frac{619 \cdot 25}{1000} = \frac{15\,475}{1000} = 15{,}475.$$

2) Ας βρύμε το εξαγόμενο τυ πολαπλασιαζμυ 6,19 · 2,5 με άλο τρόπο: αφξένυμε τον πρότο παράγοντα 100 φορες, κε τον δέφτερο παράγοντα 10 φορες, θα έχυμε το γινόμενο: $619 \cdot 25 = 15\,475$.

Το γινόμενο αφτο ίνε μεγαλίτερο τυ ζιτύμενυ 1000 φορες. Για να βρύμε το ζιτύμενο γινόμενο, πρέπι να ελατόςυμε 1000 φορες το εξαγόμενο, πυ βρίκαμε:

$$6{,}19 \cdot 2{,}5 = \frac{619 \cdot 25}{1000} = 15{,}475.$$

Μετρόντας τον αριθμο τον πςιφίον, πυ βρίςκοντε ςτα δεξια τις ιποδιαςτολις τον παραγόντον κε τυ γινομένυ, μπορύμε να παραδεχτύμε τον ακόλυθο κανόνα τυ πολαπλασιαζμυ τον δεκαδικον κλαζμάτον:

Για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι δεκαδικο κλάζμα, πρέπι να τα πολαπλαςιάςυμε ςαν να ίνε ακέρει, χορις να πάρυμε ιπ' όπςι-μας τις ιποδιαςτολες, κε ςτο εβριςκόμενο γινόμενο απο δεξια ςτ' αριςτερα να χορίςυμε με τιν ιποδιαςτολι τόςα πςιφία, όςα έχυν κε ι δίο παράγοντες.

Σιμίοςι. Κατα τι μεταφορα τις ιποδιαςτολις ςτο μέρος, πυ λίπυν πςιφία, βάζον μιδενικα.

16. Παράδιγμα. Να πολαπλασιαςθι: 0,72 · 0,003.

Λίςι. $0{,}72 \cdot 0{,}003 = 0{,}00216$, όπυ $72 \cdot 3 = 216$.

Σιμίοςι. Κατα τον πολαπλασιαζμο τον δεκαδικον κλαζμάτον πολαπλασιάζοντε τα ςιμαντικα μέρι τον παραγόντον.

§ 7. Διέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

Διέρεςι δεκαδικυ κλάζματος δια ακέρευ αριθμυ.

1. Να διερεθι: 164,32 : 52.

Λίςι. Τι διέρεςι δεκαδικυ κλάζματος δι' ακέρευ αριθμυ τιν αρχίζυν έτςι, όπος κε τιν διέρεςι τον ακέρεον αριθμον. Στο παράδιγμάμας πρέπι να διερέςυμε το 164,32 δια 52. Θα έχυμε:

$164{,}32 : 52 = 3{,}16.$

Τι λίςι τι γράφυμε ος εξις:

```
 164,32 | 52
-156    |3,16
   83
  -52
   312
  -312
```

Σιχνα ςιμβένι, όταν φτάςυμε ςτιν τελεφτέα τάξι τυ διερετέυ,

να βρίςκυμε κε κατάλιπο. Τότε μπορύμε το κατάλιπο αφτο να το μετατρέπςυμε ςε μέρι τις ακόλυθις κατότερις τάκςις κε να εκςακολυθίςυμε τι διέρεςι.

2. 63,189 : 18:

```
63,189 |18
 9 1    3,5105
   18
    90
```

Για να διερέςυμε δεκαδικο κλάζμα δια ακερέυ, πρέπι να διερέςυμε πρότα το ακέρεο μέρος τυ διερετέυ, βάζοντας ιποδιαςτολι ςτο πιλίκο, το κατάλιπο το ενόνυμε με το κλαζματικο μέρος, τρέποντάς το ςε δεκαδικο μέρος, κε εκςακολυθύμε τι διέρεςι τυ κλαζματικυ μέρυς.

Σ ι μ ί ο ς ι. Αν ο αριθμος τον πςιφίον, πυ βρίκαμε μετα τιν ιποδιαςτολι κατα τιν διέρεςι, ιπερβένι τον αριθμο τον πςιφίον, πυ μας χριάζοντε για τι λίςι τυ προβλίματος, τότε το εβριςκόμενο πιλίκο το ςτρονκιλέβομε ςτις μονάδες εκίνις τις τάκςις, πυ μας εκςαςφαλίζι τον απετύμενο αριθμο πςιφίον ςτο πιλίκο.

Ετςι ςτο παράδιγμα 2 μπορύμε να ςταματίςυμε ςτο πιλίκο 3,51, αν μας χριαζότανε να έχυμε πιλίκο μονάχα ςε εκατοςτα μέρι.

Ας περάςυμε ςτι διέρεςι δια δεκαδικυ κλάζματος.

Διέρεςι δια δεκαδικυ κλάζματος.

3. Να διερεθυν:

1) 1,61 : 0,5, 2) 0,1808 : 0,452.

Λ ί ς ι. 1) Ας αφκςίςυμε το διερετέο κε το διερέτι τόςες φορες, όςτε ο διερέτις να γίνι ακέρεος αριθμος. Γι' αφτο, ςτιν περίπτοςι αφτι κε τυς διο αριθμυς πρέπι να τυς πολαπλαςιάςυμε επι 10. Το πιλίκο απο τον πολαπλαςιαζμο αφτο δεν αλάζι:

1,61 : 0,5 = 16,1 : 5.

Για τιν τελιοτικι λίςι έμινε να κάνυμε διέρεςι δια ακέρευ αριθμυ:

16,1 : 5 = 3,22.

Ετςι κάνυμε τι διέρεςι κε ςε κίνες τις περιπτόςις, όταν το

κλαζματικο μέρος τυ διερέτι περιέχι κάμποςα δεκαδικα πςιφία μετα τιν ιποδιαςτολι.

2) 0,1808 : 0,452 = 180,8 : 452 = 0,4.

Στιν περίπτοςι αφτι, για να γίνι ο διερέτις ακέρεος αριθμος κε το πιλίκο να μι αλάκςι, ανανκαςτίκαμε το διερετέο κε το διερέτι να τυς αφκςίςυμε 1000 φορες.

Για να βρύμε το πιλίκο απο τι διέρεςι δια δεκαδικυ κλάζματος, πρέπι πρότα να αφκςίςυμε το διερετέο κε το διερέτι τόςες φορες, όςτε ο διερέτις να γίνι ακέρεος αριθμος. Γι' αφτο πρέπι τιν ιποδιαςτολι ςτο διερετέο κε ςτο διερέτι να τιν μεταφέρυμε προς τα δεκςια κατα τόςα πςιφία, όςα έχι ο διερέτις μετα τιν ιποδιαςτολι· το πιλίκο απο αφτο δεν αλάζι.

Ετςι, αν έχυμε να κάνυμε μονάχα με δεκαδικα κλάζματα, μπορύμε να απλυςτέπςυμε τι διέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον κε να κάνυμε τι διέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον ςαν ακέρεον αριθμον.

Πρέπι να δόςυμε προςοχι ςε μερικες περιπτόςις τις διέρεςις τον δεκαδικον κλαζμάτον.

4. Να βρεθι το πιλίκο: 400,4 : 0,728.

Λ ί ς ι. 400,4 : 0,728 = 400 400 : 728 = 550.

Σ ι μ ί ο ς ι. Στις περιπτόςις εκίνες, όταν τα πςιφία μετα τιν ιποδιαςτολι τυ διερετέυ ίνε λιγότερα απο τα πςιφία τυ διερέτι, πρέπι να γράπςυμε ςτο τέλος τυ διερετέυ μιδενικα.

5. 1) 9 : 0,75 = 900 : 75 = 12. 2) 9,9 : 2,25 = 990 : 225 = 4,4.

6. Να διερεθι ο 74,75 : 3,25.

Λ ί ς ι. 74,75 : 3,25 = 7475 : 325 = 23.

Σ ι μ ί ο ς ι. Αν ο διερετέος κε ο διερέτις έχυν τον ίδιο αριθμο πςιφίον μετα τιν ιποδιαςτολι, τότε παραλίπυμε τις ιποδιαςτολες κε έτςι ι διέρεςι μετατρέπετε ςε διέρεςι ακέρεον αριθμον.

Ας δίκςυμε πός να κάνυμε τις πράκςις με τα δεκαδικα κλάζματα ςε κίνες τις περιπτόςις, πυ ίνε ανάνκι να κάνυμε ςίνχρονα πολυς πολαπλαςιαζμυς κε πολες διερέςις.

7. Ας κάνυμε τις πράκςις τις παράςταςις: $\frac{4{,}5\cdot 0{,}18\cdot 0{,}005\cdot 40}{0{,}012\cdot 22{,}5}$.

Τα δεκαδικα κλάζματα μπορύμε να τα αντικαταστίςυμε με ακέρευς αριθμυς, αφκςάνοντας τον αριθμιτι κε τον παρονομαστι με τον ίδιο αριθμο.

Τι λίςι τιν γράφυμε ος εκςις:

$$\frac{4{,}5 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}005 \cdot 40}{0{,}012 \cdot 22{,}5} = \frac{45 \cdot 18 \cdot 5 \cdot 40 \cdot 1000 \cdot 10}{10 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 12 \cdot 225} = \frac{45 \cdot 18 \cdot 5 \cdot 40 \cdot 10\,000}{12 \cdot 225 \cdot 1\,000\,000} =$$
$$= \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

XIII. ΣΙΝΔΙΑΖΜΕΝΕΣ ΠΡΑΚΣΙΣ ΜΕ ΑΠΛΑ ΚΕ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

§ 1. Τροπι δεκαδικυ κλάζματος ςε απλο κλάζμα.

Ιπαμε πια, πος οπιοδίποτε δεκαδικο κλάζμα μπορύμε να το παραστίςυμε κε με μορφι δεκαδικυ κε με μορφι απλυ κλάζματος: 0,07 ίνε γραμένο με μορφι δεκαδικυ κλάζματος το $\frac{7}{100}$ με μορφι απλυ. Ι διαφορα ίνε μονάχα στον τρόπο τις παράστασις τυ κλάζματος. Γι' αφτο το κάθε δεκαδικο κλάζμα μπορύμε να το αντικαταστίςυμε με απλο κλάζμα.

Το απλο κλάζμα, πυ έχι προχίπςι, αν απλοπιίτε πρέπι να το απλοπιίςυμε, π. χ.:

$$0{,}24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

§ 2. Τροπι τυ κινυ κλάζματος ςε δεκαδικο.

1. Τα απλα κλάζματα, πυ έχυν παρονομαστι τι μονάδα με τα μιδενικα στο τέλος-τυς, γράφοντε απ' εφθίας ςαν δεκαδικα.

Π. χ.

$$\frac{97}{100} = 0{,}97, \quad \frac{48}{10\,000} = 0{,}0048.$$

Για να παραστίςυμε το απλο κλάζμα με μορφι δεκαδικυ κλάζματος, όταν στον παρονομαστι δεν ιπάρχι μονάδα με μιδενικα, αλα άλος κάπιος αριθμος, πρέπι να εκτελέςυμε διέρεςι.

2. Να τραπυν τα $\frac{5}{8}$ ςε δεκαδικο κλάζμα.

Κςέρυμε, πος κάθε απλο κλάζμα μπορι να θεοριθι ςαν πιλίκο, πυ προχίπτι απο τι διέρεςι τυ αριθμιτι δια τυ παρονομαστίτυ: το $\frac{5}{8}$ μπορύμε να το θεορίςυμε ςαν εκςαγόμενο τις διέρεςις τυ 5 δια τυ 8. Διερόντας το 5 δια τυ 8 θα έχυμε:

$$5 : 8 = 0{,}625.$$

Για να τρέπςυμε απλο κλάζμα ςε δεκαδικο, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμιτί-τυ δια τυ παρονομαστι ςίμφονα με τον κανόνα τις διέρεςις τον δεκαδικον κλαζμάτον.

§ 3. Απεριόριστα δεκαδικα κλάζματα.

Κατα τι διέρεςι τυ αριθμιτι τυ κλάζματος δια τυ παρονομαστι δε βρίςκυμε πάντοτε τελιοτικο αποτέλεζμα.

1. Να τραπι ςε δεκαδικο κλάζμα ο αριθμος $\frac{2}{11}$. Διερύμε το 2 δια τυ 11.

```
 2 | 11
 0 |0,1818...
 20
 11
  90
  88
   20
   11
    90
    88
     2
```

Τα κατάλιπα πυ προχίπτυν απο τι διέρεςι αρχίζοντας απ' το τρίτο κατάλιπο, επαναλαβένοντε κε γι' αφτο αρχίζοντας απ' τα χιλιοστα θα βρύμε στο πιλίκο ψιφία, πυ επαναλαβένοντε. Το εκςαγόμενο τις διέρεςις αφτις το ονομάζυμε απεριόριστο δεκαδικο κλάζμα. $\frac{2}{11} = 0{,}1818...$

Αφτο ςιμένι, πος δεν ιπάρχι ακριβες δεκαδικο κλάζμα ιςοδίναμο με το απλο $\frac{2}{11}$. Αφτο το πιλίκο ςινίθος το στρονκιλέβυν ςε μονάδες μιας οπιαςδίποτε τάκςις κε βρίςκυνε τιν τιμι τυ κλάζματος με ακρίβια μιας μονάδας τις τάκςις αφτις. Ετςι, π. χ. λέγυν, πος τα $\frac{2}{11} \simeq 0{,}18$ με ακρίβια ενος εκατοστυ. (Το ςιμίο $\simeq$ ςιμένι ιςότιτα κατα προσέγκιςι).

$\frac{2}{11} \simeq 0{,}182$ με ακρίβια ενος χιλιοστυ.

$\frac{2}{11} \simeq 0{,}1818$ „ „ ενος δεκάκις χιλιοστυ κ.υ.κ.

9*

Στις περιπτόσις τις διέρεσις με δομένι ακρίβια χρισιμοπιύμε μερικες απλοπίισις.

2. Να βρεθι το πιλίκο: 93 : 11 με ακρίβια ενος δεκάτυ.

Λ ί σ ι.

```
 93 |11
-88  8,45...
  50
 -44
   60
  -55
   50
```

Το πρότο πσιφίο μετα την ιποδιαστολι τυ πιλίκυ ίνε το 4. Αλα αν εκσακολυθάμε τι διέρεσι, τότε τα ακόλυθα πσιφία τυ πιλίκυ θα ίνε 545. Αφτο δίχνι, πος ακριβέστερο πσιφίο απ' το 4 δέκατα ίνε να πάρυμε τα 5 δέκατα.

Σ ι μ ί ο σ ι. Δεν ίνε ανάνκι να βρίσκυμε το ακόλυθο πσιφίο τυ πιλίκυ, αρκι να σινκρίνυμε το κατάλιπο με το διερέτι, κι αν αφτος ίνε μεγαλίτερος τυ μισυ τυ διερέτι, τότε το ακόλυθο πσιφίο τυ πιλίκυ θα ίνε μεγαλίτερο τυ 5.

Οταν βρίσκυμε το τελεφτέο κατα προσένκισι πσιφίο τυ πιλίκυ, πρέπι να σινκρίνυμε το κατάλιπο με το διερέτι, κε, αν το κατάλιπο ίνε ίσο με το μισο τυ διερέτι, ίτε μεγαλίτερο απ'αφτο, τότε μεγαλόνυμε το τελεφτέο πσιφίο τυ πιλίκυ κατα μια μονάδα, αν όμος ίνε μικρότερο απ'το μισο τυ διερέτι, τότε τον παραλίπυμε χορις να αλάκσυμε το πιλίκο.

3. Ι αμερικάνικι τόρνι ίνε κατασκεβασμένι σίμφονα με το ανκλικο μετρικο σίστιμα, όπυ μικρα μάκρι μετριύντε με ντιύιμες (1 ντιύιμα=25,4 μμ).

Να τραπυν σε μιλίμετρα τα $\frac{5}{64}$ τις ντιύιμας.

Σε μιλίμετρα το ίδιο μάκρος θα ισύτε:

$$25{,}4\cdot\frac{5}{64}=\frac{25{,}4\cdot 5}{64}=\frac{127}{64}\ \text{μμ}.$$

Τρέποντας τον $\frac{127}{64}$ σε δεκαδικο κλάζμα βρίσκυμε 1,984375 μμ. Ι εργασία στον τόρνο επιτρέπι ακρίβια μονάχα ός τα εκατοστα τυ μιλιμέτρυ. Διερόντας τον 127 δια τυ 64, πρέπι να σταματίσυμε τι διέρεσι τότε, όταν στο πιλίκο θα βρύμε εκατοστα κε τότε ι απάντισι στο πρόβλιμα θα ίνε 1,98 μμ.

Οπος φένετε απο το παράδιγμα αφτο, ο αριθμος τον δεκαδικον πσιφίον τυ κλάζματος καθορίζετε απο τις τεχνικες σινθίκες.

Οταν ένα απλο κλάζμα το μετατρέπυμε σε τέλιο δεκαδικο, πρέπι να περιορίσυμε τον αριθμο τον δεκαδικον πσιφίον, σίμφονα με τυς όρυς τυ προβλίματος.

Πρέπι να δόσυμε προσοχι στις ιδιότιτες τις διέρεσις, πυ δίνι πιλίκο, το οπίο ίνε απεριόριστο κλάζμα. Ι απεριόριστι διέρεσι πάντα δίνι κατάλιπα, πυ επαναλαβένοντε. Κε πραγματικα κατα την απεριόριστι διέρεσι δεν ίνε δινατο όλο τον κερο να έχυμε διάφορα κατάλιπα, γιατι κάθε νέο κατάλιπο πρέπι να ίνε μικρότερο τυ διερέτι, ενο ο αριθμος τον καταλίπον αφτον ίνε περιοριζμένος.

Σ'ένα απο τα παραδίγματα έχυμε 2 : 11 = 0,1818... Επιδι ο διερέτις στο παράδιγμα αφτο ίνε 11, γι'αφτο θα μπορύσαμε να έχυμε στο κατάλιπο τυς αριθμυς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10— το όλο δέκα διάφορα κατάλιπα. Μα άμα τελιόσυμε τα κατάλιπα αφτα, κάνοντας ακατάπαφτα διέρεσι, εκσάπαντος κάπιο απ'αφτα θα κσαναέρχονταν στο κατάλιπο κε απο δο όλα τα άλα κατάλιπα πρέπι να επαναλιφθυν με τι σιρά-τος.

Στο παράδιγμά-μας ι επανάλιπσι αρχίζι απο το κατάλιπο 2. Ι επανάλιπσι τυ κατάλιπυ αντανακλάτε στο πιλίκο: στο πιλίκο κσανα βρίσκυμε τα ίδια πσιφία, τα οπία ίχαμε προτίτερα, κε με την ίδια-τυς σιρα. Αν τα κατάλιπα επαναλαβένοντε κάμποσες φορες, τότε τόσες φορες περιοδικα επαναλαβένοντε κε τα πσιφία τυ πιλίκυ. Ι ομάδα τον πσιφίον τυ πιλίκυ, πυ επαναλαμβένοντε κατα την ατέλιοτι διέρεσι ονομάζετε *π ε ρ ί ο δ ο ς*, κε το απεριόστο δεκαδικο κλάζμα, πυ βρίσκαμε στο πιλίκο απο τι διέρεσι αφτι, ονομάζετε *π ε ρ ι ο δ ι κ ο κ λ ά ζ μ α*.

Στο πιλίκο-μας $\frac{2}{11}=0{,}18\ldots$ βρίσκυμε περιοδικο κλάζμα με περίοδο «18». Ι περίοδος αφτι αποτελίτε απο δίο πσιφία.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Αν στο απεριόριστο δεκαδικο κλάζμα, αρχίζοντας απο κάπιο δεκαδικο πσιφίο, ο σινδιαζμος κάμποσον αριθμον επαναλαβένετε ατέλιοτες φορες με την ίδια σιρα, τότε, τέτιο δεκαδικο κλάζμα ονομάζετε απεριόριστο περιοδικο κλάζμα.

Το περιοδικο κλάζμα σιμιόνετε με αποσιοπιτικα, πυ γράφυνε μετα την περίοδο.

Ετσι, 1) $\frac{2}{11}=0{,}1818\ldots$, περίοδος ίνε τα πσιφία 1 κε 8 (ο αριθμος 18).

2) Το κλάζμα $\frac{5}{12}=0{,}41666...$

Τρέποντας το $\frac{5}{12}$ ςε δεκαδικο, βρίκαμε απεριόριςτο περιοδικο κλάζμα. Περίοδος ίνε το πςιφίο 6.

Για να μάθουμε, πιά απλα κλάζματα τρέποντε ςε τελιοτικο δεκαδικο, κε πιά ςε απεριόριςτο, ας εκςετάςουμε ένα ακόμα τρόπο μετατροπις απλυ κλάζματος ςε δεκαδικο. Ο τρόπος αφτος έχι βάςι τιν αναζίτιςι τέτιον ςιμπλιροματικον παραγόντον για τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος, ι οπίι μετατρέπυν τον παρονομαςτι τυ κλάζματος ςε αριθμο, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα.

Τον τρόπο αφτον τον εφαρμόζυν μονάχα ςτα ανάγογα κλάζματα, διλ. ςε κίνα τα κλάζματα, τον οπίον ο αριθμιτις κε παρονομαςτις έγιναν αμιβέα πρότι αριθμι, ίςτερα απο όλες τις δινατες απλοπιίςις.

4. Να τραπυν ςε δεκαδικα τα ακόλυθα απλα κλάζματα.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{125},\ \frac{3}{250},\ \frac{7}{500},\ \frac{11}{40}.$$

Λίςι.

$$\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 1}{5\cdot 2}=\frac{5}{10},\qquad \frac{1}{5}=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5}=\frac{2}{10},$$

$$\frac{1}{4}=\frac{25\cdot 1}{25\cdot 4}=\frac{25}{100},\qquad \frac{1}{25}=\frac{4\cdot 1}{4\cdot 25}=\frac{4}{100},$$

$$\frac{1}{8}=\frac{125\cdot 1}{125\cdot 8}=\frac{125}{1000},\qquad \frac{1}{125}=\frac{8\cdot 1}{8\cdot 125}=\frac{8}{1000}.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίςκυνε ςιμπλιροματικυς παράγοντες κε για τα κλάζματα $\frac{3}{250}$, $\frac{7}{500}$, $\frac{11}{40}$.

Ο τρόπος αφτος τις τροπις απλυ κλάζματος ςε δεκαδικο χριςιμοπιίτε μόνον τότε, όταν ο παρονομαςτις τυ απλυ κλάζματος ίνε γινόμενο τυ 2 κε 5, ςε οπιαδίποτε δίναμι.

Για άλες περιπτόςις ο τρόπος αφτος δεν εφαρμόζετε. Ας το αποδίχςυμε με παράδιγμα.

5. Να τραπυν ςε δεκαδικα κλάζματα το $\frac{2}{3}$ κε το $\frac{5}{12}$.

Λίςι 1) $\frac{2}{3}=0{,}666...$ 2) $\frac{5}{22}=0{,}41666...$

Σ' αφτα τα παραδίγματα το πιλίκο έχι μορφι περιοδικυ κλάζματος.

Εφκολα μπορύμε να καταλάβυμε, γιατί δεν ίνε δινατο κάθε απλο κλάζμα να το τρέπςυμε ςε ακριβες δεκαδικο κλάζμα.

Αν ςτον παρονομαςτι τυ ανάγογυ κλάζματος ιπάρχυν άλι οπιοδίποτε πρότι παράγοντες, εκτος απ' το 2 κε το 5, τότε απο τέτιο κλάζμα δεν ίνε δινατο να πάρυμε κλάζμα με παρονομαςτι 10, 100, 1000.

Τα κλάζματα $\frac{2}{3}$ κε $\frac{5}{12}$ δεν ίνε δινατο να τα τρέπςυμε ςε ακριβι δεκαδικα κλάζματα. Δεν μπορύμε να διαλέκςυμε τελικο αριθμο, πυ πολαπλαςιαζόμενος επι τον 3 να δόςι 10, 100, 1000 κ.τ.λ., το ίδιο παρατιρύμε κε ςτα κλάζματα. $\frac{5}{12}=\frac{5}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 3}=$ $=\frac{125}{100\cdot 3}$.

Εδο δεν μπορύμε να βρύμε τον χριαζύμενο παράγοντα για το 3.

I. Αν ο παρονομαςτις ανάγογυ κλάζματος, κατα τιν ανάλιςι ςε πρότυς παράγοντες δίνι γινόμενο, αποτελύμενο μονάχα απο το 2 κε 5, τότε τέτιο κλάζμα μπορι να τραπι ςε τελικο δεκαδικο κλάζμα.

II. Αν ο παρονομαςτις ανάγογυ κλάζματος, κατα τιν ανάλιςί-τυ ςτυς πρότυς παράγοντες δίνι γινόμενο όχι απο 2 κε 5 ίτε τέτιο, ςτο οπίο εχτος απ' το 2 κε 5 περιέχοντε κε άλι παράγοντες, τότε το κλάζμα αφτο δεν ίνε δινατο να τράπι ςε τελικο δεκαδικο κλάζμα.

§ 4. Πράκςις με απλα κε δεκαδικα κλάζματα ταφτόχρονα.

Ι πράκςις, ςτις οπίες χριςιμοπιύμε απλα κε δεκαδικα κλάζματα ςιχνα χριςιμοπιύντε, όταν έχυμε να κάνυμε πολίπλοκυς λογαριαζμυς. Τότε μπορύμε όλα τα δεκαδικα να τα τρέπςυμε ςε απλα κε να κάνυμε πράκςις πάνο ςε απλα κλάζματα. Μπορύμε κε αλιότικα: όλα τα απλα κλάζματα να τα τρέπςυμε ςε δεκαδικα κε νάχυμε να κάνυμε μονάχα με δεκαδικα κλάζματα.

Στιν πραχτικι όμος τέτιες απλοπιίςις δεν οφελυν πάντα, κάποτε ίνε οφελιμότερο να αφίςυμε τα απλα κε δεκαδικα κλάζματα έτςι όπος ίνε.

Παραδίγματα. 1) Ας πολαπλασιάσυμε $0,0028 \cdot \frac{4}{7}$.

$$0,0028 \cdot \frac{4}{7} = \frac{0,0028 \cdot 4}{7} = 0,0004 \cdot 4 = 0,0016.$$

Κατα τι λίςι τυ παραδίγματος αφτυ αφίςαμε το απλο κλάζμα. Ι τροπι τυ $\frac{4}{7}$ ςε δεκαδικο κλάζμα θα μας έφερνε ςτυς κατα προςένκιςι αριθμυς.

2) Να βρεθι το πιλίκο $\frac{11}{15} : 2,64$.

Λίςι. Διερύμε δια 2,64 ςίμφονα με τον κανόνα διέρεςις δι' ακέρευ αριθμυ:

$$\frac{11}{15} : 2,64 = \frac{11}{15 \cdot 2,64} = \frac{11 \cdot 100}{15 \cdot 264} = \frac{100}{15 \cdot 24} = \frac{100}{360} = \frac{5}{18}.$$

3) Να πολαπλαςιαςθυν $0,753 \cdot \frac{12}{251}$.

Πολαπλαςιάζυμε ςίμφονα με τον κανόνα τυ πολαπλαςιαζμυ ακέρευ αριθμο επι κλάζμα:

$$0,753 \cdot \frac{12}{251} = \frac{0,753 \cdot 12}{251} = \frac{753 \cdot 12}{1000 \cdot 251} = \frac{3 \cdot 12}{1000} = \frac{36}{1000} = 0,036.$$

Εδο πολαπλαςιάζυμε κε διερύμε τα δεκαδικα κλάζματα, όπος κε τυς ακέρευς αριθμυς.

Ι τροπι τον δεκαδικον ςε απλα κλάζματα ίνε προτιμότερι τότε, όταν πολαπλαςιάζυμε ίτε διερύμε απλα ίτε δεκαδικα κλάζματα μαζι.

Στις περιπτόςις όμος τις ταφτόχρονις πρόςθεςις απλυ κε δεκαδικυ κλάζματος, καθος κε κατα τιν αφέρεςί-τυς, μονάχα λίγα δεκαδικα κλάζματα τρέπυν ςε απλα. Στις πιο πολίπλοκες περιπτόςις ίνε προτιμότερο να τρέπςυμε το απλο κλάζμα ςε δεκαδικο.

4) $\frac{2}{7} + 0,3 - \frac{1}{4} = \frac{2}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{40 + 42 - 35}{140} = \frac{47}{140}$.

5) Να γίνυν ι πράξεις: $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{5} \cdot 0,48 : 0,125$.

Λίςι.

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{5} \cdot 0,48 : 0,125 = \frac{7 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 1000}{12 \cdot 5 \cdot 125 \cdot 100} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10}{5 \cdot 125}.$$

Για να γίνι ι λίςι πιο απλι, πολαπλαςιάζυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι επι 2 κε 8, γιατι ο πολαπλαςιαςτις 2 κατα τον πολαπλαςιαζμο επι τον πολαπλαςιαςτι 5 δίνι παρονομαςτι 10, κε ο πολαπλαςιαςτις 8 πολαπλαςιαζόμενος επι 125 δίνι παρονομαςτι 1000.

$$\frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10}{5 \cdot 2 \cdot 125 \cdot 8} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10}{10 \cdot 1000}.$$

Βρίκαμε πιο απλι παράςταςι, πυ μετα τιν απλοπίιςι δίνι τέτιο εκςαγόμενο:

$$\frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4}{1000} = \frac{1344}{1000} = 1,344.$$

Σιμίοςι. Αν ςτον παρονομαςτι τυ κλάζματος πυ βρίςκυμε, ιπάρχυν παράγοντες 5, 25, 125, τότε ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις τυ εβριςκόμενυ κλάζματος πρέπι αντίςτιχα να πολαπλαςιαςτυν επι 2, 4, 8.

6) $\frac{11}{13} + 8,823 + \frac{1}{50} \simeq 0,846 + 8,823 + 0,020 \simeq 9,689.$

Σιμίοςι. Ι. Οταν ςτις πράξεις ςιναντύντε κε απλα κε δεκαδικα κλάζματα, τότε κατα τιν τροπι τυ απλυ κλάζματος ςε δεκαδικο κε κατα το ςτρονγιλεμά-τυ πρέπι να πάρυμε τόςα δεκαδικα πςιφία όςα ιπάρχυν ςτα δεδομένα κλάζματα.

Σιμίοςι ΙΙ. Σε περίπτοςι πρόςθεςις κε αφέρεςις αριθμον κατα προςένκιςι όλι ι προςθετέι, ο μιοτέος κε ο αφερετέος, πρέπι νάχυν ίδιο αριθμο πςιφίον μετα τιν ιποδιαςτολι.

Σιμίοςι. ΙΙΙ. Κατα τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι αριθμον κατα προςένκιςι όλι ι παράγοντες, το γινόμενο, ο διερετέος, διερέτις κε το πιλίκο πρέπι νάχυν ίδιο αριθμο πςιφίον ςτο ςιμαντικο μέρος-τυς.

7) $\frac{3}{7} \cdot 0,51 \simeq 0,43 \cdot 0,51 \simeq 0,22.$

8) $\frac{111}{115} \cdot 0,376 \simeq 0,965 \cdot 0,376 \simeq 0,363.$

9) $5,73 \cdot 28,1 \simeq 57,3 : 281 \simeq 0,204.$

XIV. ΛΟΓΙ ΚΕ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ.

§ 1. Διο τρόπι ςίνκριςις τον αριθμον.

Ιπάρχυν δίο τρόπι ςίνκριςις τον αριθμον.

Παράδιγμα. Το γραφίο τον ικοδομον πλίροςε ςτο τυβλο-εργοςτάςιο για διο παρτίδες τύβλα 4800 ρύβλ. κε 1200 ρύβλ. Να ςινκριθυν αφτι ι αριθμι.

Λίςι. Μπορύμε να δόςυμε διο απαντίςις:

1) μπορύμε να πύμε πος για τιν πρότι παρτίδα πλιρόσανε 3600 ρ. περιςότερο απ' ότι για τι δέφτερι παρτίδα· 2) μπορύμε να πύμε επίςις, πος για τιν πρότι παρτίδα πλιρόσανε 4 φορες περιςότερο, απ' ότι για τι δέφτερι. Κε ςτις δίο περιπτόςις έχυμε λόγο δίο ομοιδον μεγεθον.

Στιν πρότι περίπτοςι ςινκρίναμε τυς αριθμυς με τιν αφέρεςι, ςτι δέφτερι περίπτοςι με τι διέρεςι. Το πρότο αποτέλεζμα το ονομάζυν λόγο τις διαφορας, το δέφτερο πολαπλάςιο λόγο.

Ο λόγος τις διαφορας ίνε αποτέλεζμα τις ςίνκριςις διο αριθμον μέςον τις αφέρεςις, π.χ. 25 εκμ. **τ** — 10 εκμ. **τ.** = 15 εκμ. **τ.**

Ο πολαπλάςιος λόγος ίνε αποτέλεζμα τις ςίνκριςις διο αριθμον μέςον τις διέρεςις. Στο λόγο αφτο αντιςτιχι αριθμος ακέρεος ίτε κλαζματικος.

Παράδιγμα: 1) $\frac{210}{35} = 6$, 2) $\frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$.

Σε κάθε λόγο έχυμε διο αριθμυς, τυς οπίυς ςινκρίνυμε. Ι αριθμι αφτι ονομάζοντε όρι τυ λόγυ.

Ο πρότος αριθμος ίνε ο ιγύμενος όρος τυ λόγυ, ο δέφτερος αριθμος ο επόμενος όρος τυ λόγυ.

Γραφι τυ λόγυ τις διαφορας με τα γράμματα τυ αλφάβιτυ: $a - b = d$. Εδο ο a ίνε ο ιγύμενος όρος τυ λόγυ, ο b ίνε ο επόμενος κε το $(a - b)$ κε το d εκςίςυ παραςτένυν το μέγεθος τυ λόγυ τις διαφορας.

Γραφι τυ πολαπλάςιυ λόγυ με γράματα: $a : b = q$ ίτε $\frac{a}{b} = q$.

Σ' αφτο το παράδιγμα ο a ίνε ο ιγύμενος όρος, ο b ο επόμενος όρος. $\frac{a}{b}$ κε q εκςίςυ παραςτένυν το μέγεθος τυ πολοπλάςιυ λόγυ.

§ 2. Πολαπλάςιος λόγος.

Παράδιγμα. Το χτίςιμο τον τίχον ςε μια ιχοδομι κόςτιςε 40 000 ρ. Κατα τιν ελάτοςι τυ πάχυς τυ τίχυ ελαφρυ τίπυ ιχοδομίματος το χτίςιμο κόςτιςε 20 000 ρύβλια.

Πόςες φορες λιγόςτεψε ι αχςία τον τίχον τυ ελαφρυ τίπυ;

Λίςι. Πρέπι να μάθυμε πόςες φορες αχριβότερα κόςτιςαν τίχι τυ βαριυ τίπυ ιχοδομις απο τυς τίχυς τυ ελαφρυ τίπυ.

Για τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ πρέπι να ςινκρίνυμε τυς αριθμυς. Με τι διέρεςι βρίςχυμε τον ακόλυθο λόγο:

$\frac{40000}{20000} = 2$. *Απάντιςι:* κατα 2 φορες.

Ιταν δινατο να μπι το ζίτιμα αλιότικα: πιό μέρος τις αχςίας, πυ ορίςτικε ςτιν αρχι, αποτελι ι αχςία τυ τίχυ τυ ελαφρυ τίπυ;

Κατα τιν λίςι τυ προβλίματος, όπος ίνε, πρέπι να ανταλάχςυμε τις θέςις τυ λόγυ:

$\frac{20\,000}{20\,000} = \frac{1}{2}$. *Απάντιςι:* $\frac{1}{2}$.

Ο δέφτερος λόγος έχι παραςταθι με αριθμο, αντίθετο τυ προιγύμενυ.

I. Ο λόγος τυ μεγαλίτερυ αριθμυ προς το μικρότερο δίχνι, πόςες φορες ο πρότος αριθμος ίνε μεγαλίτερος τυ δέφτερυ.

II. Ο λόγος τυ μικρότερυ αριθμυ προς το μεγαλίτερο δίχνι, πόςο μέρος τυ μεγαλίτερυ αριθμυ αποτελι ο μικρότερος αριθμος.

III. Κατα τι μετάθεςι τον όρον τυ λόγυ ςχιματίζετε νέος λόγος, αντίςτροφος τυ πρότυ.

§ 3. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ πολαπλάςιυ λόγυ.

Στο κεφάλεο για τις ιδιότιτες τον κλαζμάτον εχςακριβόςαμε, πος το πιλίκο, το κλάζμα κε ο λόγος μπορύνε να θεοριθύνε ος αποτέλεζμα μιας κε τις αφτις πράχςις, τις διέρεςις. Γι' αφτο τις ιδιότιτες τυ κλάζματος κε τις ιδιότιτες τυ πιλίκυ μπορύμε να τις μεταφέρυμε κε ςτο λόγο.

Ας απαριθμίςυμε τις ιδιότιτες αφτες.

I. Οςες φορες αφχςίςυμε τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ, τόςες φορες αφχςένι κε ο λόγος. Οςες φορες ελατόνυμε τον ιγύμενο όρο, τόςες φορες ελατόνετε κε ο λόγος.

II. Οςες φορες αφχςένυμε τον επόμενο ορο τυ λόγυ, τόςες φορες ελατόνετε κε ο λόγος. Οςες φορες ελατόνυμε τον επόμενο όρο, τόςες φορες αφχςένι κε ο λόγος.

Π. χ., αφχςένοντας 3 φορες τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ $\frac{80}{20} = 4$,

θα έχυμε νέο λόγο: $\frac{240}{20} = 12$, πυ θα ίνε τρις φορες μεγαλίτερος τυ προιγύμενυ· αφκσένοντας τον επόμενο όρο τυ ίδιυ λόγυ 2 φορες, θα έχυμε το λόγο: $\frac{80}{40} = 2$, πυ ίνε 2 φορες μικρότερος τυ αρχικυ.

Ετςι επίςις ίνε ςοςτι κε για το λόγο ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος. Εμις ας τιν ονομάςυμε κιριότερι ιδιότιτα τυ λόγυ.

III. Αν πολαπλαςιάζυμε ίτε διερύμε ταφτόχρονα κε τυς διο όρυς τυ λόγυ με έναν κε τον ίδιο αριθμο, αλάζι μονάχα ι μορφι τυ λόγυ, ενο ι αριθμιτικι ακςία τυ λόγυ δεν αλάζι.

Π. χ., ο λόγος $\frac{6\ 000\ 000\ 000}{2\ 000\ 000\ 000} = \frac{6}{2} = 3$.

Ας ςιμιόςυμε κε μια ακόμα ιδιότιτα τυ λόγυ.

Ας πάρυμε το λόγο: $\frac{12}{4} = 3$.

Ας παραςτίςυμε τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ, με τον επόμενο κε με το μέγεθος τυ λόγυ, κατα τον κανόνα: ο διερετέος ιςύτε με τον διερέτι επι το πιλίκο.

$$12 = 4 \cdot 3.$$

Εδο θα βρύμε τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ, κςέροντας το μέγεθος τυ λόγυ κε τον επόμενο όρο-τυ. Γράφοντάς-το θα έχυμε:

Ιγύμενος όρος = επόμενος όρος × μέγεθος τυ λόγυ.

Τιν ιδιότιτα θα τιν λέμε προφορικα έτςι:

IV. Ο ιγύμενος όρος τυ πολαπλάςιυ λόγυ ιςύτε με τον επόμενο, πολαπλαςιαςμένο επι το μέγεθος τυ λόγυ.

§ 4. Εβρεςι τυ άγνοςτυ όρυ τυ λογυ.

Ι ιδιότιτες τυ λόγυ μας διεφκολίνυν να βρύμε τον άγνοςτο όρο τυ λόγυ, αν ίνε γνοςτος ο άλος όρος τυ λόγυ κε το μέγεθος τυ λόγυ.

1. $\frac{x}{3} = 5$. Εδο ο άγνοςτος ίνε ο ιγύμενος όρος τυ λόγυ διλαδι ο διερετέος. Θα έχυμε: $x = 3 \cdot 5 = 15$.

2. $\frac{72}{x} = 4$. Εδο ο άγνοςτος ίνε ο διερέτις, ο οπίος ίνε κε ο επόμενος όρος τυ λόγυ. Θα έχυμε: $x = \frac{72}{4} = 18$.

§ 5. Απλοπίιςι ςτις πράκςις για τιν έβρεςι τυ λόγυ κε αντικατάςταςι τυ λόγυ τον κλαςματικον αριθμον με λόγο ακέρεον αριθμον.

1. Απλοπίιςι τον λόγον. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ λόγυ μας επιτρέπι να κάνυμε πιο απλο το λόγο κε να απλοπιίςυμε τυς όρυς τυ λόγυ.

1. Να βρεθι ο λόγος τον αριθμον 17 200 κε 1290.

Λίςι.

$$\frac{17\ 200}{1290} = \frac{1720}{129} = \frac{40}{3}.$$

Με τι διέρεςι απλοπιίςαμε τον ιγύμενο κε τον επόμενο όρο τυ λόγυ δια 10 κε έπιτα δια 43.

Αν ο ιγύμενος κε επόμενος όρος τυ πολαπλάςιυ λόγυ έχυν κινο πολαπλαςιαςτι, τότε μπορύμε κε τυς δίο όρυς τυ λόγυ να τυς απλοπιίςυμε δια τυ πολαπλαςιαςτι αφτυ.

II. Αντικατάςταςι τον κλαςματικον αριθμον ςτυς λόγυς.

2 Να βρεθι ο λόγος τον αριθμον: 1) 40,5 : 15,3 2) $2\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$.

Λίςι.

$$1)\ 40{,}5 : 15{,}3 = \frac{40{,}5}{15{,}3} = \frac{405}{153} = \frac{45}{17} = 45 : 17,$$

$$2)\ 2\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{10}{3} = 10 : 3.$$

Στα παραδίγματα αφτα, διερόντας κε απλοπιόντος τα κλάζματα, αντικαταςτένυμε το λόγο τον κλαζματικον αριθμον με λόγο ακέρεον αριθμον.

Για να βρύμε το λόγο κλαζματικον αριθμον, πρέπι να τυς τρέψυμε ςε ομόνιμα, να παραλίψυμε τυς παρονομαςτες κε να πάρυμε το λόγο τον αριθμιτον.

1) Ο λόγος 5,9 : 4,7 = 59 : 47,

2) ο λόγος 4,13 : 2,5 = 413 : 250.

§ 6. Ενια αναλογιον.

Οριζμος. Διο ίσι πολαπλάσιι λόγι ενομένι με το σιμίο τις ισότιτας, αποτελυν πολαπλάσια αναλογία.

Σιμίοσι. Τιν πολαπλάσια αναλογία θα τιν ονομάσυμε απλα αναλογία.

Πρόβλιμα. Ενα ταχιδρομικο τρένο διέτρεξε σε 6 όρες 180 χμ κε εξακολυθόντας το δρόμο-τυ διέτρεξε 90 χμ σε 3 όρες. Αλαξε ι ταχίτιτα τυ τρένυ ίτε όχι;

Λίσι. Το πρότο μέρος τυ δρόμυ το τρένο το διέτρεξε με ταχίτιτα $\frac{180}{6} = 30$ χμ τιν όρα. Το δέφτερο μέρος τυ δρόμυ το διέτρεξε με ταχίτιτα $\frac{90}{3} = 30$ χμ τιν όρα. Ι ταχίτιτα τυ τρένυ δεν άλαξε. Στο πρόβλιμα αφτο ο λόγος $\frac{180}{6} = 30$ κε ο λόγος $\frac{90}{3} = 30$ ίνε ίσι. Ι ισότιτα τον λόγον $\frac{180}{6} = \frac{90}{3}$ σχιματίζι αναλογία.

Ι αναλογία αφτι διαβάζετε έτσι: 1) ο 180 έχι λόγο προς τον 6, όπος ο 90 προς τον 3, ίτε: 2) ο λόγος τυ 180 προς τον 6 ίνε ίσος προς τον λόγο τυ 90 προς τον 3, ίτε: 3) το 180 ίνε τόσες φορες μεγαλίτερο απο το 6, όσες φορες το 90 ίνε μεγαλίτερο τυ 3.

Ι γραφι με γράματα θα ίνε: $a : b = c : d$, ίτε $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Κάθε όρος τις αναλογίας έχι τιν ονομασία-τυ: ο a κε ο d ονομάζοντε άκρι όρι τις αναλογίας, ο b κε ο c ονομάζοντε μέσι όρι τις αναλογίας.

Ι αριθμι, με τυς οπίυς μπορύμε να σχιματίζυμε αναλογία, ονομάζοντε ανάλογι αριθμι.

§ 7. Ι κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας.

1. Αγοράσαμε 10 μ ίφαζμα προς 20 ρύβλια το μέτρο. Πόσα μέτρα ίφαζμα μπορύμε να αγοράσυμε με τα ίδια χρίματα προς 5 ρύβλ. το μέτρο;

Λίσι. $10 \cdot 20 = 200$ ρ. $200 : 5 = 40$ μ.

Με 200 ρύβλια μπορύμε να αγορύσυμε 40 μ προς 5 ρύβλ.

Αν θα σινκρίνυμε το ποσο τον μέτρον κε τιν αξία κε στις

διο περιπτόσις, τότε θα έχυμε τιν αναλογία $\frac{40}{10} = \frac{20}{5}$, επιδι ι λόγι τον αριθμον ίνε ίσι. Ι αριθμι αφτι σχιματίζυν αναλογία. Σινάμα κε τα γινόμενα (έπρεπε να ξοδέψυμε ένα κε το αφτο ποσο) διλ. 40 · 5 κε το 20 · 10 ίνε επίσις ίσα.

Αφτι ίνε ι κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας.

Το γινόμενο τον μέσον όρον τις αναλογίας ισύτε με το γινόμενο τον άκρον όρον.

2. Ας σχιματίσυμε αναλογία με τυς αριθμυς 20, 4, 15, 3 κε ας δοκιμάσυμε τιν κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας.

Λίσι. Σχιματίζυμε ίσυς λόγυς: $\frac{20}{4} = 5$, $\frac{15}{3} = 5$.

Αναλογία: $\frac{20}{4} = \frac{15}{3}$, $20 \cdot 3 = 15 \cdot 4$.

Τιν κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας μπορύμε να τιν παραστίσυμε κε να τιν αποδίξυμε με γράματα.

Αν: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, τότε πολαπλασιάζοντας καθένα απ' τυς λόγυς αφτυς επί το bd θα έχυμε: $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$ ίτε κατα τιν απλοπίισι, $ad = bc$.

§ 8. Σχιματιζμος αναλογιον απο δομένυς αριθμυς.

1. Να σχιματιστι αναλογία απο τυς αριθμυς 20, 12, 10, 6 κε να γίνι ι δοκιμί-τυς.

Λίσι. 1) Για να λίσυμε τις αναλογίες κατατάσυμε τυς αριθμυς κατα σιρα κε κατα το μέγεθός-τυς 20, 12, 10, 6.

Ας σχιματίσυμε αναλογία:

$$20 : 12 = 10 : 6.$$

Κε ι διο λόγι ίνε ίσι κε ισοδίναμι με το $\frac{5}{3}$.

2) Ας δοκιμάσομε, αν ίνε σοστι ι αναλογία αφτι εφαρμόζοντας τιν κιριότερι ιδιότιτα:

$$20 \cdot 6 = 12 \cdot 10.$$

Το γινόμενο τον άκρον όρον ισύτε με το γινόμενο τον μέσον όρον κε ισοδιναμι με 120. Ι αναλογία ίνε σοστι. Ι αριθμι 20, 12, 10, 6 ίνε ανάλογι.

3) Ινε άραγε δινατο να σχιματίσυμε αναλογία απο τυς αριθμυς 25, 10, 8, 4; Αν θα γράψυμε το λόγο 25 : 10 κε το λόγο 8 : 4 τότε δε γίνετε να γράψυμε αναμεταξί-τυς το σιμίο τις

ισότιτας κε το γινόμενο τον άκρον όρον 25 · 4 δεν ισύτε με το γινόμενο τον μέσον όρον 10 · 8.

Ι αριθμι 25, 10, 8 κε 4 δεν ίνε ανάλογι.

Ας δόσυμε τον όρο, με τον οπίο μπορι να ςχιματισθι αναλογία απο τέσερις δομένυς αρθμυς, κε τον κανόνα τυ ςχιματιζμυ αναλογιον.

I. Αν το γινόμενο διο αριθμον ισύτε με το γινόμενο δίο άλον αριθμον, τότε ι τέσερις αφτι αριθμι ίνε ανάλογι.

II. Κατα τον ςχιματιζμο αναλογίας, τυς αριθμυς τυ ενος γινομένυ πρέπι να τυς κάνυμε άκρυς όρυς τις αναλογίας, τυς αριθμυς τυ άλυ μέσυς.

2. Να ςχιματιστι αναλογία απο τυς τέσερις αριθμυς 8 κε 5, 2 κε 20.

Τα γινόμενα αφτον τον αριθμον ανα δίο ίνε ίσα:

$$8 \cdot 5 = 2 \cdot 20.$$

Θα γίνι τέτια αναλογία:

$$20 \cdot 8 = 5 : 2.$$

Ι όρι 8 κε 5 ίνε μέσι όρι. Ι όρι 2 κε 20 ίνε άκρι.

§ 9. Μετάθεσι τον όρον τις αναλογίας.

I. Στιν αναλογία μπορύμε να αλάκςυμε τις θέσις τυ πρότυ κε τυ δέφτερυ λόγυ.

Εχυμε τις αναλογίες.

1) $18 : 15 = 6 : 5$. 2) $6 : 5 = 18 : 15$.

Ι δέφτερι αναλογία ςχιματίςτιχε απο τιν πρότι με τι μετάθεσι τον λόγον. Ι ισότιτα φένετε πος διαφιλάτετε.

Ι δοχιμι με τον πολαπλασιαζμο τον άκρον κε τον μέσον όρον τις αναλογίας επίσις δίχνι, πος ι αναλογίες αφτες ίνε ςχιματιζμένες σοστα:

$$5 \cdot 18 = 6 \cdot 15.$$

II. Στιν αναλογία μπορύμε να κάνυμε μετάθεσι τον άκρον όρον ίτε τον μέσον όρον.

Ας δοκιμάσυμε αν αλιθέβυν ι αναλογίες:

1) $20 : 16 = 5 : 4$, 2) $20 : 5 = 16 : 4$, 3) $4 : 16 = 5 : 20$.

Ι δέφτερι αναλογία ςχιματίςτιχε απο τιν πρότι με τι μετάθεσι τον μέσον όρον: ο 5 πίγε στι θέσι τυ 16, κε ο 16 στι θέσι τυ 5. Ι τρίτι αναλογία ςχιματίςτιχε απο τιν πρότι με τι μετάθεσι τον άκρον όρον: ο 4 πίγε στι θέσι τυ 20 κε ο 20 στι θέσι τυ 4.

Τα γινόμενα τον άκρον κε μέσον όρον ς' όλες αφτες τις αναλογίες δεν άλαχςαν, αλα έμιναν ίσια. Ι αναλογίες αφτες ςχιματίστιχαν σοστα.

III. Τυς λόγυς τον αναλογιον μπορύμε να τυς αντικαταςτίσυμε με τυς αντίςτροφυς λόγυς.

Οπος φένετε, ς' αφτι τιν περίπτοσι ι ισότιτα δε χαλνα. Ετσι π.χ. τιν αναλογία $20 : 16 = 5 : 4$ μπορύμε να τιν αντικαταστίσυμε με άλι, πυ προχίπτι απο τιν μετάθεσι τον ιγύμενον κε τον επόμενον όρον χάθε λόγυ: $16 : 20 = 4 : 5$. Τα γινόμενα τον μέσον κε άχρον όρον κε στις διο αναλογίες ίνε ίσα. Κε ι διο αναλογίες έχυν ςχιματιστι σοστα. Ι λόγι τις δέφτερις αναλογίας θάνε αντίςτροφι με τυς λόγυς τις πρότις αναλογίας. Ι μέσι όρι τις πρότις αναλογίας έγιναν άχρι στι δέφτερι κε τανάπαλι: ι άχρι όρι τις πρότις αναλογίας έγιναν μέσι στι δέφτερι.

Για να κςέρυμε, πόσες αναλογίες μπορύμε να ςχιματίσυμε απο τυς τέσερις αριθμυς κε πόσες μεταθέσις επιτρέπι ι αναλογία, πρέπι να αλάκςυμε τις θέσι τον όρον τις αναλογίας, εφαρμόζοντας όλυς τυς παραπάνο τρόπυς τις αλαγις τον θέσεον τον όρον τις αναλογίας. Δίνετε ι αναλογία $60 : 40 = 3 : 2$. Ας χάνυμε στιν αναλογία αφτι όλες τις δινατες μεταθέσις, έτσι πυ να τιριθι πάντα ι ισότιτα: $60 \cdot 2 = 3 \cdot 40$.

Ας μεταθέσυμε τυς μέσυς όρυς τις αναλογίας.

Θα έχυμε:

1) $60 : 40 = 3 : 2$, 2) $60 : 3 = 40 : 2$

Αντικαταστένοντας κε τυς δίο λόγυς τις πρότις κε τις δέφτερις αναλογίας με τυς αντίςτροφυς λόγυς, θα έχυμε:

3) $40 : 60 = 2 : 3$, 4) $3 : 60 = 2 : 40$.

Μεταθέτυμε τον δέφτερο λόγο ς' όλες τις αναλογίες στι θέσι τυ πρότυ κε τον πρότο στι θέσι τυ δέφτερυ.

Θα έχυμε το όλο οχτο αναλογίες:

1) $60:40 = 3:2$ 5) $3:2 = 60:40$
2) $60:3 = 40:2$ 6) $40:2 = 60:3$
3) $40:60 = 2:3$ 7) $2:3 = 40:60$
4) $3:60 = 2:40$ 8) $2:40 = 3:60$.

Σ ι μ ί ο ς ι. Σ' όλες αφτες τις αναλογίες τα γινόμενα τον άκρον κε τα γινόμενα τον μέσον όρον ίνε ίςα: $120 = 60 \cdot 2 = 40 \cdot 3$. Το γινόμενο αφτο ίνε το κιριότερο γνόριζμα τις ορθότιτας τυ ςχιματιζμυ όλον τον αναλογιον, πυ ςχιματίςτικαν απο τυς τέςερις δομένυς αριθμυς: 60, 40, 3, 2.

Με τα γράματα θα έχυμε:

1) $a:b = c:d$, 3) $b:a = d:c$, 5) $c:d = a:b$, 7) $d:c = b:a$
2) $a:c = b:d$, 4) $c:a = d:b$, 6) $b:d = a:c$, 8) $d:b = c:a$

§ 10. Εβρεςι ενος αγνόςτυ όρυ τις αναλογίας.

Χριςιμοπιόντας τιν κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας, μπορύμε πάντα να βρύμε τον άγνοςτο τέταρτο όρο τις αναλογίας, όταν κςέρυμε τυς τρις όρυς-τις.

1. Να βρεθι ο άγνοςτος x τον ακόλυθον αναλογιον:

1) $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$, 2) $\frac{4}{3} = \frac{x}{15}$, 3) $\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$, 4) $\frac{x}{15} = \frac{4}{3}$.

Σ' όλες τις περιπτόςις έχυμε μια λίςι $3x = 15 \cdot 4$, απο τιν οπία έχυμε:

$$x = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20.$$

Ο άγνοςτος όρος τις αναλογίας βρίςκετε έτςι, όπος βρίςκετε ο άγνοςτος πολαπλαςιαςτις, όταν ίνε γνοςτο το γινόμενο κε ένας απ' τυς παράγοντες.

Για να βρύμε τον άγνοςτο μέςο όρο τις αναλογίας, πρέπι το γινόμενο τον άκρον όρον να το διερέςυμε δια τυ γνοςτυ μέςυ όρυ. Για να βρύμε τον άγνοςτο άκρο όρο τις αναλογίας, πρέπι το γινόμενο τον μέςον όρον να το διερέςυμε δια τυ γνοςτυ άκρυ όρυ.

Στιριζόμενι ςτον κανόνα αφτο μπορύμε να γράπςυμε τι λίςι έτςι:

2. Να βρεθι ο x τις αναλογίας $12 : x = 6 : 5$.

$$x = \frac{12 \cdot 5}{6} = 10.$$

§ 11. Εβρεςι τυ τέταρτυ ανάλογυ.

Σιχνα δίνοντε τρις αριθμι, κε ζιτίτε τέταρτος αριθμος τέτιος, πυ μαζι με τυς τρις δομένυς να ςχιματίςι αναλογία.

Π α ρ ά δ ι γ μ α. Να βρεθι ο τέταρτος ανάλογος τον αριθμον 8, 10, 5.

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα αφτο έχι κάμποςες λίςις.

Ας κατατάκςυμε τυς αριθμυς κατα ςιρα, ανάλογα με το μέγεθός-τυς: 10, 8, 5.

Τόρα θα βάλυμε τον αριθμο x μπροςτα, πίςο κε ανάμεςα ςτυς αριθμυς αφτυς κε θα γράπςυμε τις αναλογίες, πυ βρίςκυμε. Ετςι θα λίςυμε 4 αναλογίες. Στις αναλογίες αφτες ο άγνοςτος x βρίςκετε μια ςτι θέςι τυ ενος άκρυ όρυ, μια ςτι θέςι τυ άλυ άκρυ, μια ςτι θέςι ενος απο τυς μέςυς όρυς.

1) $x : 10 = 8 : 5$, $x = \frac{10 \cdot 8}{5} = 16$,

2) $10 : x = 8 : 5$, $x = \frac{5 \cdot 10}{8} = 6\frac{1}{4}$,

3) $10 : 8 = x : 5$, $x = \frac{5 \cdot 10}{8} = 6\frac{1}{4}$,

4) $10 : 8 = 5 : x$, $x = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4$.

Ι δέφτερι κε ι τρίτι περίπτοςι δίνυν τις ίδιες απαντίςις. Μένυν τρις λίςις: $x = 16$, $x = 6\frac{1}{4}$, $x = 4$.

XV. ΕΦΘΙΑ ΚΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑ. ΕΝΙΑ ΤΥ ΜΕΣΥ ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΥ.

§ 1. Σταθερα κε μεταβαλόμενα μεγέθι.

Κατα τιν μαθιματικι εκςερέβνιςι τον φενομένον, ζιτύμε να βρύμε ςτα φενόμενα αφτα τέτιες ιδιότιτες, πυ να μπορέςυμε να τις εκτιμίςυμε κε να τις καταμετρίςυμε, κε να κάνυμε τυς λογαριαζμύς-μας πάνο ςτο εκςαγόμενο τον καταμετρίςεον. Σινάμα όμος πάντα ζιτύμε να μάθυμε τιν εκςάρτιςι, πυ ιπάρχι μετακςι δίο ί κε περιςότερον μεγεθον.

Τα μεγέθι, πυ μελετύμε με τιν βοίθια τον μαθιματικον, μπορύμε να τα χορίςυμε ςε διο ομάδες: I — μεγέθι ςταθερα, II — μεγέθι μεταβαλομένα. Παράδιγμα ςταθερον μεγεθον μπορυν να χριςιμέπςυν ι μονάδες, με τι βοίθια τον οπίον κάνυμε τιν καταμέτριςι: μέτρο, χιλιόγραμο, δεφτερόλεφτο, χρόνος. Τα μεγέθι αφτα δεν μεταβάλοντε. Ιπάρχυν κε άλα ςταθερα μεγέθι, π. χ. το μέγεθος τις ορθις γονίας.

Ο ρ ι ζ μ ι. I. Σταθερο μέγεθος ονομάζετε εκίνο το μέγεθος, το οπίο δεν αλάζι τιν τιμί-τυ.

II. Μεταβαλόμενο μέγεθος ονομάζετε εκίνο το μέγεθος, το οπίο αλάζι τιν τιμί-τυ.

Μεταβαλόμενα μεγέθι ςιναντύμε ςε κάθε βίμα-μας. Ι κάτικι τις πόλις αλάζυν με τιν παρέλεφςι τον χρόνον· αλάζι το βάρος κε το ανάςτιμα τυ ανθρόπυ με τιν ιλικία-τυ· αλάζι το μάκρος μεταλικυ δοκαριυ κατα τι θέρμανςι.

Ι κάτικι, το μάκρος, το βάρος ς' αφτες τις περιπτόςις ίνε μεμεταβαλόμενα μεγέθι. Τα μεταβαλόμενα μεγέθι εκςαρτόντε απο άλα μεταβαλόμενα μεγέθι.

Ας δόςυμε μερικα παραδίγματα τις εκςάρτιςις τον μεταβαλαμένον μεγεθον.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΥ ΕΜΒΑΔΥ ΤΟΝ ΤΕΤΡΑΓΟΝΟΝ.

Ι πλεβρα τυ τετραγόνυ (ςαντίμετρα)...	3	4	11	20	24
Το εμβαδο τυ τετραγόνυ (τετραγονικα ςαντίμετρα)	9	16	121	400	576

Σνον πίνακα αφτο ιπάρχυν διο ςιρες. Στιν πρότι ςιρα ίνε ςιμιομένο το μάκρος τον πλεβρον τον διαφόρον τετραγόνον: **3 ςμ**, **4 ςμ** κ. λ. π. Στι δέφτερι ίνε ςιμιομένα τα αντίςτιχα εμβαδα, διλ. τα εμβαδα τον τετραγόνον με πλεβρες **3 ςμ, 4 ςμ** κ. λ. π. Ι πλεβρα τυ τετραγόνυ ςτιν περίπτοςι αφτι ίνε ένα μεταβαλόμενο μέγεθος. Αφτο έχι δοθι. Το εμβαδο τυ τετραγόνυ ίνε άλο μεταβαλόμενο μέγεθος. Αφτο εκςαρτάτε απο τιν πλεβρα.

Ο ρ ι ζ μ ι. I. Το μεταβαλόμενο μέγεθος, τιν

τιμι τυ οπίυ μπορύμε να μεταβάλυμε όπος θέλυμε, ονομάζετε ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο μέγεθος.

II. Το μεταβαλόμενο μέγεθος, ι τιμι τυ οπίυ μεταβάλετε όταν μεταβάλετε άλο μεταβαλόμενο μέγεθος, ονομάζετε εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο μέγεθος.

§ 2. Κατ' εφθίαν ανάλογα μεγέθι.

Μελετόντας τιν εκςάρτιςι, πυ ιπάρχι μεταξι τον μεταβαλόμενον μεγεθον, μπορύμε ςε μερικες περιπτόςις να καθορίςυμε το νόμο τις αλαγις τυ μεγέθυς τυ εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ απ' τιν αλαγι τυ μεγέθυς τυ ανεκςάρτιτυ μεταβαλόμενυ.

Ας μάθυμε τις ιδιότιτες αφτις τις εκςάρτιςις, πυ φέρι το όνομα *ε φ θ ί α α ν α λ ο γ ί α*.

Το βάρος 1 κιβ. **ντμ** ατςαλιυ ιςύτε με 7,8 **χγ**. Ας βρύμε το βάρος κοματιον ατςαλιυ, ο όνκος τον οπίον ιςύτε με: 5, 10, 50, 100, 150, 200 κιβ. **ντμ**.

Ας γράπςυμε τι λίςι ςε μορφι πίνακα:

P — το βάρος τυ κοματιυ ςε χιλιόγραμα......	7,8	39	78	390	780	1170	1560
V — ο όνκος τυ κοματιυ ςε κιβικα ντετςίμετρα...	1	5	10	50	100	150	200

Ας πάρυμε απο τον πίνακα το βάρος ενος οπιυδίποτε κοματιυ κε ας βρύμε το λόγο αφτυ τυ βάρυς προς το βάρος άλυ κοματιυ. Π, χ:

$$\frac{390}{78}=5.$$

Ας βρύμε το βάρος τον όνκον τον ίδιον κοματιον. $\frac{50}{10}=5.$

Ι λόγι αφτι ίνε ίςι κε ι αριθμι 390, 78, 50 κε 10 ςχιματίζυν αναλογία: $\frac{390}{78}=\frac{50}{10}$, ίτε $\frac{390}{50}=\frac{78}{10}$. Το ίδιο αποτέλεζμα θα έχυμε, ςινκρίνοντας πάνο ςτον πίνακα τα βάρι κε τυς όνκυς διο άλον κοματιον ατςαλιυ. Οταν με τυς τέςερις αριθμυς τον δίο ςτιλον τυ

πίναχα μπορι να ςχιματιςθι αναλογία, τότε έχυμε **αναλογικι εκςάρτιςι**.

Λέμε, πος το βάρος τυ P ατςαλένιυ χοματιυ ίνε ανάλογο με τον όνχο τυ V χοματιυ.

Ι γραφικι παράςταςι τις λίςις θάνε τέτια:

$$\frac{P_2}{P_1} = 5, \quad \frac{V_2}{V_1} = 5,$$

ίτε με μορφι αναλογιον:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1},$$

$$\frac{P_2}{V_2} = \frac{P_1}{V_1},$$

το P_1 κε P_2 ίνε βάρι τον χοματιον, το V_1 κε V_2 ίνε ι όνχι τον ίδιον χοματιον.

Εκςετάζοντας τον πίναχα, μπορύμε να καθορίςυμε τις ακόλυθες ιδιότιτες τις αναλογικις εκςάρτιςις:

Ι. Ο πίνακας περιέχι τις τιμές δίο μεταβαλόμενον μεγεθον.

ΙΙ. Ενα απο τα μεγέθι αφτα θα ίνε ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο, το άλο — εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

ΙΙΙ. Στιν κάθε τιμι ενος μεγέθυς αντιςτιχι μια οριςμένι τιμι τυ άλυ μεγέθυς.

Ας παραδεχτύμε ος ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο τον όνχο. Τότε το βάρος θα ίνε εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

Παρατιρύμε, πος ςε κάθε όνχο αντιςτιχι το βάρος-τυ, επιδι με τιν αλαγι τυ όνχυ αλάζι κε το βάρος· δε μπορυν να ιπάρχυν δίο ίςα κατα τον όνχο χομάτια με διάφορα βάρι, ίτε διο χομάτια ίςα κατα το βάρος, αλα διαφορετικυ όνχυ. Οςτε, αν ι όνχι ίνε ίςι, τότε κε τα βάρι ίνε ίςα.

ΙV. Αφκςένοντας τιν τιμι τυ ενος μεγέθυς οςεςδίποτε φορες, αφκςένι κε ι αντίςτιχι τιμι τυ άλυ μεγέθυς κατα τόςες φορες.

V. Ι λόγι δίο τιμον ενος μεγέθυς κε δίο αντίςτιχον μ' αφτες τιμον άλυ μεγέθυς ίνε ίςι κε αποτελυν αναλογία.

Τις ιδιότιτες αφτες έφκολα μπορύμε να τις εκςελένκςυμε πάνο ςτον εκςεταζόμενο πίναχα.

Ας πάρυμε διο χομάτια ςίδερο: 10 **κιβ ντμ** κε 100 **κιβ. ντμ.** Ο όνχος τυ δέφτερυ ίνε μεγαλίτερος, παραβαλόμενος με τον όνχο τυ πρότυ, αλα, όπος φένετε, μαζι μ' αφτο θα αφκςιθι κε το βάρος. Ο όνχος αφκςίθικε 10 φορες κε το βάρος αφκςίθικε 10 φορες: αντις 78 **χγ** θα ίνε πια 780 **χγ.**

Ο λόγος $\frac{100}{10}$ ιςύτε με τον 10, κε ο λόγος $\frac{780}{78}$ επίςις ιςύτε με τον αριθμο 10. Αφτι ι λόγι ίνε ίςι.

Ι αριθμι 780, 78, 100 κε 10 ςχιματίζυν αναλογία $\frac{780}{78} = \frac{100}{10}$.

VI. Ο λόγος τις αριθμιτικις τιμις τυ εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ προς τιν αντίςτιχι αριθμιτικι τιμι τυ ανεκςάρτιτυ μεταβαλόμενυ ιςύτε πάντα με έναν κε τον ίδιο αριθμο.

Π. χ: $\frac{78}{10} = \frac{780}{100} = \frac{1560}{200} = 7{,}8$.

Ο ίδιος όρος ςτι γραφικι παράςταςι έχυν τιν μορφι: $\frac{P}{V} = K$, όπυ το $K = 7{,}8$. Ι αριθμι 7,8 κε K ονομάζοντε ςιντελεςτες τις αναλογίας.

Ι εκςάρτιςι, πυ έχι αφτες τις ιδιότιτες, ονομάζετε **εφθία αναλογία**.

Τα μεταβαλόμενα μεγέθι, πυ έχυν ςχέςι μ' αφτι τιν εκςάρτιςι, ονομάζοντε **μεγέθι κατ' εφθίαν ανάλογα**.

Αν δίο μεγέθι βρίςκοντε ςε τέτια εκςάρτιςι, όςτε αφκςένοντας το ένα απ' αφτα κάμποςες φορες, αφκςένι κε το άλο τόςες φορες, τότε λένε, πος τα μεγέθι αφτα βρίςκοντε ςε εκςάρτιςι κατ' εφθίαν αναλογικι, ίτε ότι κατ' εφθίαν ανάλογα το ένα προς το άλο.

Στο παράδιγμά-μας το βάρος κε ο όνχος τυ χοματιυ ίνε **μεγέθι κατ' εφθίαν ανάλογα**, ίτε απλα **ανάλογα**.

Ι γραφικι παράςταςι τυ νόμυ τις εφθίας αναλογίας θάνε $\frac{P}{V} = K$, ίτε $P = KV$.

§ 3. Εφαρμογι τον αναλογιον ςτι λίςι προβλημάτον.

Ι λεπτομεριακι μελέτι τις εκςάρτιςις τυ βάρυς απο τον όνκο απόδιχςε, πος το βάρος κε ο όνκος τον αντιχιμένον, πυ ίνε καμομένα απο ένα ιλικο, ίνε μεγέθι κατ' εφθίαν ανάλογα.

Τόρα μπορύμε να πλατένυμε το πρόβλιμά-μας. Μπορύμε, εποφελύμενι τις ιδιότιτες τον κατ' εφθίαν ανάλογον μεγεθον, να βρύμε τις απετύμενες τιμες τον μεγεθον χορις να ςχιματίςυμε πίνακα.

1. Ενα τρένο ςε 2 όρες διέτρεχςε 60 **χμ.** Να βρεθι: 1) ο δρόμος, τον οπίο το ίδιο τρένο θα διατρέχςι ςε 3 όρες, κε 2) ο χρόνος, πυ πρέπι να κςοδέπςι για να διατρέχςι 180 **χμ** δρόμο, αν πάι πάντα με τιν ίδια ταχίτιτα.

Για τι λίςι τυ προβλίματος εποφελύμαςτε τιν ιδιότιτα τον αναλογικον μεγεθον κε ςχιματίζυμε αναλογία. Ας παραςτίςυμε το ένα ζιτύμενο μέγεθος με x κε το άλο με το y. Τιν αναλογία τιν ςχιματίζυν έτςι, όςτε να έχι τρις γνοςτες τιμες μεγεθον κε μία άγνοςτι. Δεν ίνε ανάνκι κάθε φορα να ςχιματίζυμε πίνακα τον τιμον τον αναλογικον μεγεθον για τι λίςι τυ προβλίματος. Αρχι να έχυμε διο ζέβγι τιμον, ςιμπεριλαβάνοντας κε κίνο το ζέβγος, πυ περιέχι ένα άγνοςτο μεταβαλόμενο, αφυ απο μπροςτα βεβεοθίκαμε, πος τα μεγέθι θα ίνε ανάλογα.

Για να καταλάβυμε καλίτερα το πρόβλιμα, βάζυμε τυς δομένυς κε τυς άγνοςτυς αριθμυς ςε δίο ςτίλες, κε ςινάμα ςε κάθε ςτίλι γράφυμε τις τιμες ενος κε τυ ίδιυ μεγέθυς. Ι αντίςτιχες τιμες τον διο μεγεθον θα βρεθυν τότε ςτιν ίδια ςιρα.

1) Για να βρύμε το δρόμο έχυμε:

2 όρες — 60 χμ

3 „ — x „,

$x : 60 = 3 : 2$, απο δο: $x = \frac{60 \cdot 3}{2} = 90$ **χμ.**

2) Για να βρύμε το χρόνο έχυμε:

2 όρες — 60 χμ

y „ — 180 „,

$y : 2 = 180 : 60$, απο δο $y = \frac{2 : 180}{60} = 6$ όρες.

Με τέτια γραφι καθένας λόγος έχι ςχιματιςτι απο τις τιμες ενος κε τυ αφτυ μεγέθυς.

Σ ι μ ί ο ς ι. Προ τις λίςις εκςάπαντος πρέπι να δοκιμάςυμε αν ίνε τα δομένα αφτα μεγέθι ανάλογα.

2. 40 χρονον άνθροπος ζιγίζι 60 **χγ.** Πόςο ζιγίζι πεδι 10 χρονο;

Λ ί ς ι. Στιν ερότιςι τυ προβλίματος δεν ίνε δινατο να βρύμε απάντιςι κάνοντας τις ςχετικες πράχςις, γιατι τιν ιλικία κε το βάρος τυ ανθρόπυ δεν μπορύμε να τα λογαριάςυμε ποςα ανάλογα, όπος μας δίχνι ι πίρα.

§ 4. Μεγέθι αντιςτρόφος ανάλογα.

Δε ςιμβένι πάντοτε τα ανάλογα μεγέθι να ικανοπιίςυν τιν εκςάρτιςι τις εφθίας αναλογίας. Σιχνα ςινάντάτε κε άλι εκςάρτιςι, ι οπία ονομάζετε α ν τ ί ς τ ρ ο φ ι α ν α λ ο γ ί α.

Π α ρ ά δ ι γ μ α. Ο ακόλυθος πίνακας παραςτένι τιν εκςάρτιςι μεταχςι τυ αριθμυ τον ςτροφον ςτο λεπτο τυ αντιχιμένυ, πυ τορνάρυνε ςτον τόρνο, κε τι διάμετρο αφτυ τυ αντιχιμένυ.

n—αριθμος τον ςτροφον ςτο λεφτο	10	16	20	50	80	100	160
D—διάμετρος ςε μιλίμετρα	200	125	100	40	25.	20	12,5

Ας πάρυμε για ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο τι διάμετρο D. Ο αριθμος τον ςτροφον n θα εκςαρτιθι απο το μεταβαλόμενο D. Εκςετάζοντας το νόμο τις εκςάρτιςις, παρατιρύμε, πος ο πίνακας τον τιμον δεν ικονοπιι τυς όρυς τις εφθίας αναλογίας, επιδι:

1. Με τιν άφκςιςι τις διαμέτρυ ο αριθμος τον ςτροφον δεν αφκςένι, αλα ελατόνετε.

2. Ο λόγος τυ εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ προς το ανεκςάρτιτο δε δίνι ςταθερο αριθμο.

Ι ιδιότιτες τυ πίνακα θα ίνε ι ακόλυθες:

I. Ο πίνακας περιέχι διο ςιρες τιμον μεταβαλόμενον μεγεθον.

II. Το ένα απο αφτα τα μεγέθι θα ίνε ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο, το άλο εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

III. Στιν κάθε τιμι μεγέθυς τις μιας ςιρας αντιςτιχι μια οριζμένι τιμι μεγέθυς τις άλις ςιρας.

IV. Με τιν άφκςιςι τον τιμον τυ μεγέθυς τις

μιας σιρας κατα κάμποσες φορες ι τιμι τον μεγεθον τις άλις σιρας ελατόνετε τόσες φορες.

V. Ο λόγος δίο τιμον τον μεγεθον τις μιας σιρας κε ο αντίστροφος λόγος διο αντίστιχον τιμον τις άλις σιρας ίνε ίσι κε αποτελυν αναλογία.

VI. Το γινόμενο τις αριθμιτικις τιμις τυ εκσαρτιμένυ μεταβαλόμενυ επι τιν αντίστιχι αριθμιτικι τιμι τυ ανεκσάρτιτυ μεταβαλόμενυ ισύτε πάντα με ένα κε τον ίδιο αριθμο.

Τις ιδιότιτες αφτες ίνε έφκολο να τις εκσελένκσυμε στο παράδιγμα τυ δομένυ πίνακα, όπος εκσελένκσαμε τις ιδιότιτες τις εφθίας αναλογίας.

Τιν εκσάρτισι, πυ έχι τέτιες ιδιότιτες, τιν ονομάζυν *α ν τ ί σ τ ρ ο φ ι α ν α λ ο γ ί α*.

Αν διο μεγέθι εκσαρτύντε το ένα απο το άλο έτσι, όστε με τιν άφκσισι τυ ενος απο αφτα κάμποσες φορες ελοτόνετε το άλο τόσες φορες, τότε λένε, πος τα μεγέθι βρίσκοντε σε εκσάρτισι αντιστρόφος ανάλογι ίτε, ότι ίνε αντίστροφα ανάλογα το ένα προς το άλο.

Αν θα σινκρίνυμε τις ιδιότιτες τις εφθίας κε αντίστροφις αναλογίας θα δύμε, πος θα διαφέρυν μονάχα κατα τιν IV, V κε VI ιδιότιτα· ι IV ιδιότιτα ίνε τόσο εφκολονόιτι, όστε δεν απετι ιδιέτερες επεκσιγίσις.

Ας εκσετάσυμε τιν V ιδιότιτα, πυ ίνε περίπτοσι εφθίας αναλογίας. Εκι κε εδο παρατιρίτε αναλογία. Ι διαφορα μονάχα ίνε στιν ταξινόμισι τον όρον τις αναλογίας. Ας το εκσιγίσυμε πάνο σε παράδιγμα. Ας πάρυμε απο τον πίνακα τυς αριθμυς τον στροφον για τις διάμετρες 200 μμ κε 40 μμ.

Ι διάμετρος	200.....40
Ο αριθμος τον στροφον	10.....50

$$200 : 40 = 50 : 10,\ 200 \cdot 10 = 40 \cdot 50.$$

Σε περίπτοσι αντίστροφις αναλογίας, όπος φένετε στο παράδιγμα αφτο, ο λόγος δίο τιμον ενος μεγέθυς (αριθμον μιας σιρας) ίνε ίσος με τον αντίστροφο λόγο τον αντίστιχον τιμον τυ άλυ μεγέθυς, (δίο αριθμον τις δέφτερις σιρας), ενο το γινόμενο τον αντίστιχον τιμον τον διο μεγεθον ίνε το ίδιο.

Ι γραφικι παράστασι τον αναλογιον κε τον λόγον τις αντίστροφις αναλογίας θάνε τέτια.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D_2},$$

ίτε

$$n_2 : n_1 = \frac{1}{D_2} : \frac{1}{D_1}.$$

Εδο το D_2 κε D_1 παραστένυν τις αριθμιτικες τιμες τον διαμέτρον κε τα n_2 κε n_1 τυς αντίστιχυς σ'αφτες αριθμυς τον στροφον.

Ι γραφικι παράστασι τις VI ιδιότιτας έχι μορφι.

$$Dn = K.$$

Στιν περίπτοσί-μας το $K = 2000$. Ι αριθμι 2000 κε K φέρυν τιν ονομασία σιντελεστες τις αναλογίας.

Ας σινκρίνυμε τι λίσι τον διο προβλιμάτον. Στο ένα τα δομένα κε το ζιτύμενο μέγεθος θα ίνε κατ' εφθίαν ανάλογα, στο άλο πρόβλιμα, αντιστρόφος ανάλογα.

Πρόβλιμα 1. Ενα αφτοκίνιτο διέτρεκσε σε 2 όρες 120 χμ. Σε πόσο κερο με τις ίδιες σινθίκες μπορι το αφτοκίνιτο να διατρέκσι 300 χμ;

Λ ί σ ι. Κσέρυμε, πος ο δρόμος κε ο χρόνος κατα τιν ισόταχι κίνισι ίνε σινδεμένος με το νόμο τις εφθίας αναλογίας.

Γράφυμε τυς όρυς:

2 όρες — 120 χμ
x „ — 300 „

Σχιματίζυμε αναλογία: $2 : x = 120 : 300$, ίτε $x : 2 = 300 : 120$ απο το οπίο έχυμε:

$$x = \frac{2 \cdot 300}{120} = 5 \text{ όρες}.$$

Πρόβλιμα 2. Για το κσεφόρτομα τον βαγονιον χορις μιχανι χριάζοντε 6 εργάτες, πυ εκτελυν τι δυλια αφτι σε 8 όρες. Πόσι εργάτες θα χριαστυν, για να κσεφορτόσυν το ίδιο φορτίο σε 3 όρες;

Λ ί σ ι: Κατα τι λίσι τέτιον προβλιμάτον ι μέσι εργατικι ικανότιτα τυ ενος εργάτι λογαριάζετε σταθερι.

Με τιν άφκσισι τυ αριθμυ τον εργατον ο χρόνος τυ κσεφορτόματος ελατόνετε ανάλογα. Στο πρόβλιμα αφτο έχυμε να κάνυ-

με με αντίστροφι αναλογία μεγεθον. Ας γράπσυμε τυς όρυς τυ προβλίματος:

6 εργάτες — 8 όρες
x „ — 3 „

Πέρνυμε τυς λόγυς κε γράφυμε αναλογία:

$$3 : 8 = 6 : x, \text{ ίτε } x : 6 = 8 : 3.$$

Απο δο βρίςκυμε:

$$x = \frac{6 \cdot 8}{3} = 16 \text{ εργάτες.}$$

§ 5. Λίςι προβλιμάτον με τιν αναγογι ςτι μονάδα.

Τιν τιμι ενος απ' τα μεγέθι ςε περιπτόςις εφθίας κε αντίστροφις αναλογίας, μπορύμε να τιν βρύμε με τιν αναγογι ςτι μονάδα.

Πρόβλιμα 1. 28 εργάτες με ίδιο μιςθο πέρνυν 4200 ρύβλια το μίνα. Πόςο μιςθο θα πάρυν 50 εργάτες, πυ πλιρόνοντε με τον ίδιο μιςθο;

Λίςι. Ι 28 εργάτες πέρνυν 4200 ρύβλια. Πόςο πέρνι ο ένας εργάτις; Ενας εργάτις πέρνι 28 φορες λιγότερο. Ας το γράπςυμε. Κάθε μια εργατικι μονάδα θα πάρι $\frac{4200}{28}$ ρύβλια.

Πόςο πέρνυν 50 εργάτες; Ο μιςθος τον πενίντα εργατον θα ίνε 50 φορες μεγαλίτερος απο το μιςθο τυ ενος εργάτι. Θα έχυμε λιπον:

$$\frac{4200 \,.\, 50}{28} = 7500 \text{ ρύβλ.}$$

Ι πλέρια γραφτι λίςι θα έχι τιν ακόλυθι μορφι:

Για τυς 28 εργάτες ο μιςθος ίνε 4200 ρύβλια.

„ τον 1 „ „ „ „ $\frac{4200}{28}$ „

„ τυς 50 „ „ „ „ $\frac{4200 \cdot 50}{28} = 7500$ ρύβλια.

Πρόβλιμα 2. 20 εργάτες βάζυν τα θεμέλια ενος χτιρίυ ςε 15 ιμέρες. 25 εργάτες με τιν ίδια παραγογικότιτα ςε πόςες μέρες θα τελιόςυν τιν ίδια εργαςία;

Λίςι. Για το φτιάςιμο τον θεμελίον χριάζετε εργαςία 20 εργατον ςε 15 μέρες. Πόςες εργάςιμες μέρες θα χριαςτυν για τιν εργαςία αφτι; Για τιν εργαςία αφτι ιποτίθετε να κςοδέπςυν $(20 \cdot 15)$ εργάςιμες μέρες.

Σε πόςες μέρες θα τελιόςυν τιν ίδια εργαςία 25 άνθροπι;

25 άνθροπι θα τελιόςυν τιν εργαςία 25 φορες γριγορότερα. Θα χριαςτυν 25 φορες ολιγότερες ιμέρες. Ας γράπςυμε τι λίςι.

Για 20 εργάτες χριάζετε 15 ιμερον εργαςία.

„ 1 εργάτι „ $20 \cdot 15$ ιμερον εργαςία

„ 25 εργάτες „ $\frac{20 \cdot 15}{25} = 12$ ιμερον εργαςία

§ 6. Αναλογικι διέρεςι.

Πρόβλιμα 1. 3 τορναδόρι για να επεκςεργαςτυν ένα μέρος τις μιχανις χριάςτικαν $2\frac{1}{2}$ όρες. Ο πρότος τορναδόρος δύλεπςε 40 λεφτα, ο δέφτερος 50 λεφτα κε ο τρίτος τον επίλιπο κερο. Για όλι τιν εργαςία αφτι πλιροθίκανε 12 ρύβλια. Πόςα ρύβλια πίρε ο κάθε τορναδόρος;

Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε με ςινιθιςμένες αριθμιτικες πράκςις. Εμις όμος κςέροντας τις ιδιότιτες τον αναλογιον, μπορύμε να λίςυμε το πρόβλιμα τύτο πιο ςίντομα, με τον τρόπο τις διέρεςις κατ' αναλογίαν.

Οςο πιο πολι δύλεπςε ο εργάτις, τόςα περιςότερα χρίματα θα πάρι. Ι πλιρομι τις εργαςίας κε ο χρόνος ίνε ανάλογα ποςα. Εδο έχυμε εφθία αναλογία.

Ας παραςτίςυμε με τα γράματα τιν πλιρομι τις εργαςίας: τυ πρότυ εργάτι με το x_1, τυ δέφτερυ με το x_2, τυ τρίτυ με το x_3. Ας γράπςυμε, πος ι πλιρομι ίνε ανάλογι με το χρόνο, διλ. $x_1 : x_2 : x_3 = 40 : 50 : 60$.

Το άθριςμα τον μερον $40 + 50 + 60 = 150$. Ι πλιρομι για ένα μέρος τις εργαςίας αποτελι $\frac{1200}{150} = 8$ καπ. Ι πλιρομι κάθε εργάτι: τυ πρότυ $8 \cdot 40 = 320$ καπ., τυ δέφτερυ $8 \cdot 50 = 400$ καπ., τυ τρίτυ $8 \cdot 60 = 480$ καπ.

Σιμίοςι. Τυς λόγυς μπορύμε να τυς γράπςυμε κε έτςι: $x_1 : x_2 : x_3 = 40 : 50 : 60 = 4 : 5 : 6$. Το όλο 15 μέρι. Λογαριάζοντας θα βεβεοθύμε, πος ι πλιρομι τις εργαςίας θα ίνε ι ίδια.

Πρόβλιμα 2. Να διερεθι ο αριθμος 855 ςε μέρι ανάλογα τον:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{5}.$$

Λ ί ς ι. $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{40}{60} : \frac{45}{60} : \frac{50}{60} : \frac{36}{60}.$

Ι λόγι δεν μεταβάλοντε, αν πολαπλαςιάςυμε τον ιγύμενο κε τον επόμενο όρο κάθε αναλογίας επι 60. Μετασχιματίζοντας το λόγο τελιοτικα θα έχυμε:

$$x_1 : x_2 : x_3 \cdot x_4 = 40 : 45 : 50 : 36.$$

Το άθριζμα τον μερον: $40 + 45 + 50 + 36 = 171$. Το ένα μέρος $\frac{855}{171} = 5$. Τόρα βρίςκυμε το x_1, x_2, x_3, x_4: θα έχυμε 200, 225, 250, 180. Το άθριζμα θα αποτελέςι 855.

Σ ι μ ί ο ς ι. Το λόγο τον κλαζματικον αριθμον πάντα πρέπι να τον αντικαταςτίςυμε με λόγο ακέρεον αριθμον. Γι' αφτο τα κλάζματα τα τρέπυμε ςε ομόνιμα κε πέρνυμε το λόγο τον αριθμιτον.

Πρόβλιμα 3. Να διερεθι το 1380 ςε μέρι ανάλογα τον ακόλυθον αριθμον:

$$0{,}4, \quad 0{,}5, \quad 0{,}32, \quad 0{,}16.$$

Λ ί ς ι. Για να λίςυμε το πρόβλιμα αφτο γράφυμε αναλογίες:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0{,}4 : 0{,}5 : 0{,}32 : 0{,}16 = 40 : 50 : 32 : 16 = 20 : 25 : 16 : 8.$$

Το άθριζμα τον μερον $20 + 25 + 16 + 8 = 69$. Το μέγεθος τυ ενος μέρυς ιςύτε: $\frac{1380}{69} = 20$ κε $x_1 = 400$, $x_2 = 500$, $x_3 = 320$, $x_4 = 160$.

Για να διερέςυμε ένα δομένο αριθμο ςε μέρι ανάλογα κάμποςον αριθμον, πρέπι: 1) να αντικαταςτίςυμε το λόγο τον κλαζματικον αριθμο με λόγο ακέρεον· 2) να προςθέςυμε τυς αριθμυς, πυ βρίκαμε, για να μάθυμε τον αριθμο τον μεριδίον, ςτα οπία πρέπι να διερέςυμε τον δομένο αριθμο· 3) να διερέςυμε τον δομένο αφτον αριθμο δια τυ αριθμυ τον μεριδίον, για να μάθυμε με τί ιςύτε το ένα μέρος· 4) να πολαπλαςιάςυμε το μέγεθος τυ ενος μέρυς, πυ βρίκαμε επι τυς ακέρευς αριθμυς τον λόγον.

Κάποτε ςιναντύντε πιο πολίπλοκες περιπτόςις διέρεςις κατ' αναλογίαν.

Πρόβλιμα 4. Για να κάνυμε μπετον ανακατόνυν κςιρο τςιμέντο, άμο κε χαλίκια. Ο λόγος τον όνκον, πυ αποτελυν τα ςιςτατικα τυ μπετον, ίνε 2 : 6 : 9.

Πόςο άμο κε χαλίκια θα χριαςτυν για τιν ετιμαςία διάλιςις, αν θα διαθέτυμε 900 **κιβ. ντμ** κςερο τςιμέντο; Πόςο μπετον, θα γίνι αν ο όνκος τον χαλικιον αποτελι 0,9 τυ όνκυ τυ μπετον, πυ παραςκεβάζυμε;

Λ ί ς ι. Ολο το μίγμα περιέχι $2 + 6 + 9 = 17$ μέρι. Εδο μπένυν 2 μέρι τςιμέντυ. Εχυμε 900 **κιβ. ντμ** τςιμέντο. Οςτε, ς' ένα μέρος τις διάλιςις αναλογι $\frac{900}{2} = 450$ **κιβ. ντμ.**

Τόρα ας βρύμε τα ςιςτατικα τυ μπετον.

Θα χριαςτυν ιλικα:

τςιμέντο	2 μέρι...	$450 \cdot 2 = 900$	**κιβ.**	**ντμ.**
άμο	6 μέρι...	$450 \cdot 6 = 2700$	„	„
χαλίκια	9 μέρι...	$450 \cdot 9 = 4050$	„	„

Θα ετιμάςυμε μπετον $4050 : 0{,}9 = 4500$ **κιβ.ντμ**$= 4{,}5$ **κιβ.μ.**

Στο πρόβλιμα αφτο έχυν δοθι ι λόγι τον όνκον τον ςιςτατικον μερον κε ο αριθμος, πυ δίχνι τον όνκο μιας απο τις υςίες. Διερόντας τον αριθμο αφτο δια τυ αντίςτιχυ αριθμυ τον μερον, μάθαμε με τί ιςύτε ένα μέρος τυ μίγματος. Με τον πολαπλαςιαζμο βρίκαμε, πόςο πρέπι να πάρυμε απο κάθε υςία.

Πρόβλιμα 5. Τέςερις κολχόζνικι εργάςτικαν ς' ένα ιδιέτερο χοράφι. Ι εργατοιμέρες τυ καθενος ίςαν ανάλογι με τυς αριθμυς 12 : 15 : 18 : 20. Ο δέφτερος κε ο τρίτος έκαναν 66 εργατοιμέρες. Πόςες εργατοιμέρες έκανε ο καθένας;

Παραςτένυμε τον αριθμο τον εργατοιμερον με το x_1, x_2, x_3, x_4.

Λ ί ς ι. Οπος πάντα, πρέπι να καθορίςυμε, με πόςες ιμέρες αντιςτιχι το ένα μέρος. Στο μερίδιο τυ δέφτερυ κε τρίτυ κολχόζ-

νικυ αναλογυν $15 + 18 = 33$ μέρι, πυ αποτελυν 66 μέρες. Το ένα μέρος αποτελι $\frac{66}{33} = 2$ μέρες. Ορίζυμε τον αριθμο τον εργατοιμερον για τον κάθε κολχόζνικο:

$$x_1 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ μέρες}, \quad x_3 = 2 \cdot 18 = 36 \text{ μέρες},$$
$$x_2 = 2 \cdot 15 = 30 \text{ μέρες}, \quad x_4 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ μέρες}.$$

Στο πρόβλιμα αφτο μας έχι δοθι το άθριζμα όχι όλον τον μερον, μα μονάχα κάμποσον, γι' αφτο για τι λίςι τυ προβλίματος προςθέςαμε όλα αφτα τα μέρι.

Κάποτε ςιμβένι, να μας δίνετε ςτο πρόβλιμα όχι το άθριζμα δίο οπιονδίποτε μερον, μα ι διαφορά-τυς.

Πρόβλιμα 6. Τέςερις εργάτες, δυλέβοντας μαζι, έπρεπε να μιράςυν τα χρίματα, πυ κέρδιςαν, ανάλογα με τον αριθμο τον εκςαρτιμάτον, πυ φτιάςανε. Ο ένας απ' αφτυς παρέδοςε 5, ο δέφτερος 8 ο τρίτος 6 κε ο τέταρτος 6 εκςαρτίματα. Οταν πλιροθίκανε, ο δέφτερος εργάτις πίρε κατα 10 ρύβλια περιςότερα απο τον τρίτο. Πόςα κέρδιςε ο καθένας;

Λ ί ς ι. Ολο το κέρδος πρόκιτε να μιραςθι ςε μέρι ανάλογα:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 8 : 6 : 6.$$

Ο αριθμος τον μερον τυ δέφτερυ εργάτι ίνε περιςότερος, παρα τυ τρίτυ. Βρίςκυμε τι διαφορα: $8 - 6 = 2$ μέρι. Για δίο μέρι ο δέφτερος εργάτις πίρε 10 ρύβλια. Οςτε το ένα μέρος αποτελύςε 5 ρύβλια.

Ο 1-ος θα πάρι $x_1 = 5 \cdot 5 = 25$ ρύβλια,
Ο 2-ος θα πάρι $x_2 = 5 \cdot 8 = 40$ ρύβλ.
Ο 3-ος θα πάρι $x_3 = 5 \cdot 6 = 30$ ρύβλ.
Ο 4-ος θα πάρι $x_4 = 5 \cdot 6 = 30$ ρύβλ.

Σε μερικα προβλίματα ςιμβένι να διερέςυμε τον αριθμο ςε μέρι αντιςτρόφος ανάλογα με τυς δεδομένυς αριθμυς. Ας φέρυμε παραδίγματα λίςις τέτιον προβλιμάτον.

Πρόβλιμα 7. Πρέπι να ςχιματίςυμε μίγμα απο δίο ίδι τςαγιυ. Το ένα χιλιόγραμο τυ πρότυ ίδυς ακςίζι 15 ρύβλ., τυ δέφτερυ 6 ρύβλ. Το ποςο τυ τςαγιυ τυ πρότυ κε δέφτερυ ίδυς, πυ πίραμε να κάνυμε μίγμα, ίνε αντιςτρόφος ανάλογα με τιν ακςία τυ τςαγιυ.

Πόςο τςάι πρότυ κε δέφτερυ ίδυς πρέπι να πάρυμε για να κάνυμε μίγμα 105 **χγ**;

Λ ί ς ι. Αν το βάρος ίνε αντιςτρόφος ανάλογο τις ακςίας τυ τςαγιυ, αφτο ςιμένι, πος ο λόγος τον βαρον ιςύτε με το λόγο τον αριθμον, πυ ίνε αντίςτροφι με τιν ακςία τυ τςαγιυ.

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{15} : \frac{1}{6}.$$

Αντικαταςτένοντας το λόγο τον κλαζματικον αριθμον με λόγο ακέρεον, θα έχυμε:

$$x_1 : x_2 = \frac{2}{30} : \frac{5}{30} = 2 : 5.$$

I ίδυς πρέπι να πάρυμε 2 μέρι,
II ίδυς „ „ „ 5
Το όλο „ „ „ $2 + 5 = 7$ μέρι.

Το ένα μέρος αποτελι $\frac{105}{7} = 15$ **χγ**.

I ίδυς πρέπι να πάρυμε $15 \cdot 2 = 30$ **χγ**,
II ίδυς „ „ „ $15 \cdot 5 = 75$ **χγ**.

Πρόβλιμα 8. Να διερεθι ο αριθμος 1440 κατ' αντίςτροφι αναλογία με τυς αριθμυς 5, 7.

Λ ί ς ι. Ας πάρυμε αριθμυς αντίςτροφυς προς τυς δομένυς. Γράφυμε τυς όρυς τυ προβλίματος με μορφι λόγον αφτον τον αριθμον:

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{5} : \frac{1}{7}.$$

Αντικαταςτένυμε το λόγο τον κλαζματικον αριθμον με λόγο ακέρεον:

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{7} = \frac{7}{35} : \frac{5}{35} = 7 : 5.$$

Βρίςκυμε τον αριθμο τον μερον: $7 + 5 = 12$.

Βρίςκυμε τιν τιμι τυ ενος μέρυς: $\frac{1440}{12} = 120$.

Βρίςκυμε τυς ζιτύμενυς αριθμυς:

$$x_1 = 120 \cdot 7 = 840$$
$$x_2 = 120 \cdot 5 = \frac{600}{1440}.$$

Ετςι επίςις λίνυμε τα προβλίματα ςε κίνες τις περιπτόςις, όταν ίνε ανάνκι να διερεθι αριθμος αντιςτρόφος ανάλογα με τρις, τέςερις κ. τ. λ. αριθμυς.

§ 7. Μέςος αριθμιτικος όρος.

Κατα τιν ταξςινόμιςι κε διαλογι τον αβγον το ίδος-τυς καθορίζετε με το ζίγι.

Πρότο ίδυς αβγα λογαριάζοντε εκίνα, πυ έχυν βάρος 7,78 χγ τα 120 κομάτια· δέφτερυ ίδυς εκίνα, πυ έχυν βάρος 6,96 χγ τα 120· τρίτυ ίδυς εκίνα, πυ έχυν βάρος 5,32 χγ τα 120. Στο κολχόζι διαλέγοντας τα αβγα βρίκαν τα ακόλοθα βάρι:

Ζίγιζμα	Βάρος (ςε χιλιόγραμα)	Αριθμος αβγον	Βάρος ενος αβγυ (ςε χιλιόγραμα)	Βάρος 120 αβγον (ςε χιλιόγραμα)
1	2,581	40	0,0645	7,740
2	3,321	50	0,0664	7,968
3	1,286	20	0,0643	7,716
4	6,511	100	0,0651	7,812
5	7,849	120	0,0654	7,849
	21,548	330		

Για να βρύμε ςε πιό ίδος ανίχυν αφτα τ' αβγα, πρέπι να καθορίςυμε το μέςο βάρος τυ ενος αβγυ κε το μέςο βάρος τον 120 αβγον. Το βάρος κάθε αβγυ το βρίςκυν με τι διέρεςι τυ βάρυς τον ζιγιζμένον αβγον δια τυ αριθμυ τον αβγον. Απο τον πίνακα βλέπυμε, πος τα εκατοςτα μέρι κατα το ζίγιζμα τυ ενος αβγυ (κε τα ακέρεα χιλιόγραμα κατα το ζίγιζμα τον 120 αβγον) ς' όλες τις περιπτόςις τυ ζιγίζματος ίνε τα ίδια. Διαφορα ιπάρχι μονάχα στα χιλιοςτα. Αφτο ςιμένι, πος για το βάρος ενος αβγυ τα εκατοςτα τυ χιλιόγραμυ έχυν οριςθι ςοςτα, αλα τα χιλιοςτα κε δεκάκις χιλιοςτα δίχνυν λάθος. Κατα το ζίγιζμα 120 αβγον έχυμε όμιυς αριθμυς για τα ολόκλιρα χιλιόγραμα. Οςτε, για τα 120 αβγα τα ολόκλιρα χιλιόγραμα έχυν οριςθι ςοςτα, κε το λάθος αρχίζι απο τα δέκατα. Λέμε, πος κατα το ζίγιζμα τυ ενος αβγυ τα χιλιοςτα κε τα δεκάκις χιλιοςτα τυ χιλιόγραμυ δεν θα ίνε ακριβις αριθμι. Οπος φένετε, τ' αβγα έχυν διαφορα κατα το βάρος στα χιλιοςτα τυ χιλιογράμυ. Επίςις μπορύμε να πύμε, πος για το βάρος τον 120 αβγον έχυμε αναχριβις αριθμυς για τα δέκατα τυ χιλιογράμυ.

Βλέπυμε, πος δεν μπορύμε να έχυμε αχριβις αριθμυς κατα τιν καταμέτριςι, δε μπορύμε να έχυμε αχριβες βάρος τυ αβγυ μονάχα με το ζίγιζμα. Το βάρος τυ αβγυ, πυ βρίςχυμε στο κάθε ζίγιζμα, θα ίνε το κατα προςέγκιςι βάρος-τυ.

Ας ςιμφονίςυμε: πάντα, ς' όλες τις καταμετρίςις κε ςτυς κατα προςέγκιςι λογαριαζμυς να πάρυμε μονάχα ένα αναχριβι αριθμο· όλυς τυς άλυς αναχριβις αριθμυς θα τυς απορίψυμε, στρονκιλέβοντας τον αριθμο, πυ βρίκαμε.

Θα πάρυμε για το βάρος τυ ενος αβγυ τυς ακόλυθυς αριθμυς. 0,064 **χγ**· 0,066 **χγ**· 0,064 **χγ**· 0,065 **χγ**· 0,065 **χγ**. Για το βάρος 120 αβγον: 7,7 **χγ**· 8,0 **χγ**· 7,7 **χγ**· 7,8 **χγ**· 7,8 **χγ**.

Ας πάρυμε το μέςο αριθμιτικο όρο όλον τον βαρον ίτε, όπος λένε τι μέςι τιμι τυ βάρυς. Αφτον τον αριθμο θα τον παραδεχτύμε ος αχριβι.

Για να βρύμε τον μέςο αριθμιτικο όρο (διλ. τον μέςο όρο) κάμποςον αριθμον πρέπι να προςθέςυμε όλυς τυς δομένυς αριθμυς κε το άθριζμα να το διερέςυμε δια τυ αριθμυ τον προςθετέον.

Για ένα αβγο:

$$\frac{0{,}064+0{,}066+0{,}064+0{,}065+0{,}065}{5}\approx 0{,}065 \text{ χγ}.$$

Για τα 120 αβγα:

$$\frac{7{,}7+8{,}0+7{,}7+7{,}8+7{,}8}{5}\approx 7{,}8 \text{ χγ}.$$

Ετςι βρίκαμε το μέςο βάρος ενος αβγυ 0,065 **χγ** κε για τα 120 αβγα — 7,8 **χγ**. Τα αβγα, πυ ζιγίςαμε, μπορύμε να τα λογαριάςυμε αβγα πρότυ ίδυς.

Οταν έχυμε πολα ζιγίζματα, βρίςχυμε ικανοποιητικα εχςαγόμενα αχόμι κε τότε, όταν τα χςεχοριςτα ζιγίζματα δεν ίςαν αρχετα αχριβι.

Για να βρύμε τον μέςο αριθμιτικο πολον αριθμον πρέπι να προςθέςυμε όλυς αφτυς τυς αριθμυς κε το άθριζμα να το διερέςυμε δια τυ αριθμυ τον προςθετέον.

XVI. ΠΟΣΟΣΤΑ.

§ 1. Ενια ποςοςτον.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Ποςοςτο ονομάζετε το εκατοςτο μέρος τυ αριθμυ.

Στιν αρχι χριςιμοπιύςαν τι λέχςι ποςοςτο τότε μονάχα, όταν ο δανιςτις δάνιζε χρίματα κε ζιτύςε να τυ επιςτρέπςυν τα χρίματα με οριζμένι προςθίκι ςτα εκατο.

Για τιν παράςταςι τον ποςοςτον χριςιμοπιυν ιδιέτερο ςιμίο, το $^0/_0$.

$1^0/_0$ ςιμένι ένα ποςοςτο, διλ. ένα εκατοςτο τυ αριθμυ.

$3^0/_0$ ςιμένι τρία ποςοςτα, διλ. τρία εκατοςτα τυ αριθμυ.

§ 2. Αντικατάςταςι κλαζματικις παράςταςις ςε παράςταςι ποςοςτον.

Οταν λίνυμε προβλίματα, ςιχνα ςιμβένι τον αριθμο, πυ παραςτένι ποςοςτα, να τον τρέπυμε ςτα εκατοςτα μέρι-τυ κε το αντίθετο, τα εκατοςτα μέρι τυ αριθμυ να τα παραςτένυμε με ποςοςτα.

1. Ας παραςτίςυμε τα ακόλυθα δεκαδικα κλάζματα με ποςοςτα:

$1=100^0/_0$	$0{,}07=7^0/_0$	$0{,}1=10^0/_0$
$0{,}01=1^0/_0$	$1{,}17=117^0/_0$	$1{,}08=108^0/_0$
$0{,}003=0{,}3^0/_0$	$0{,}825=82{,}5^0/_0$	$0{,}016=1{,}6^0/_0$
$0{,}58=58^0/_0$	$3{,}7=370^0/_0$	$4{,}57=457^0/_0$
$0{,}001=0{,}1^0/_0$	$2=200^0/_0$	

Για να αντικαταςτίςυμε μια αριθμιτικι παράςταςι με τιν αντίςτιχι παράςταςι ποςοςτον, πρέπι να τιν πολαπλαςιάςυμε επι 100, ίτε να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι κατα δίο πςιφία προς τα δεκςια.

2. Τα ακόλυθα ποςοςτα ας τα παραςτίςυμε με μορφι δεκαδικον κλαζμάτον.

$1^0/_0=0{,}01$	$156^0/_0=1{,}56$	$100^0/_0=1$
$0{,}8^0/_0=0{,}008$	$560^0/_0=5{,}6$	$35{,}6^0/_0=0{,}356$
$0{,}1^0/_0=0{,}001$	$700^0/_0=7$	$20^0/_0=0{,}2$
$5^0/_0=0{,}05$	$307^0/_0=3{,}07$	$1{,}4^0/_0=0{,}014$
$17^0/_0=0{,}17$	$354^0/_0=3{,}54$	$0{,}5^0/_0=0{,}005.$

Για να αντικαταςτίςυμε παράςταςι ποςοςτον με δεκαδικο κλάζμα, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμο, πυ παραςτένι ποςοςτα δια 100, ίτε να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι διο πςιφία προς τα αριςτερα.

3. Ας αντικαταςτίςυμε τιν παράςταςι τον ποςοςτον με απλα κλάζματα: $50^0/_0$ ενος αριθμυ ιςύντε με $\frac{1}{2}$ τυ ίδιυ αριθμυ, $10^0/_0= =\frac{1}{10}$, $20^0/_0=\frac{1}{5}$, $25^0/_0=\frac{1}{4}$, $75^0/_0=\frac{3}{4}$, $5^0/_0=\frac{1}{20}$, $4^0/_0=\frac{1}{25}$, $2^0/_0=\frac{1}{50}$, $33^0/_0\approx\frac{1}{3}$.

4. Να αντικατασταθυν τα ακόλυθα κλάζματα με παράςταςι ποςοςτον:

$\frac{3}{5}=0{,}6=0{,}60=60^0/_0$, $\frac{1}{8}=0{,}125=12{,}5^0/_0$, $\frac{2}{5}=40^0/_0$,

$\frac{3}{8}=0{,}375=37{,}5^0/_0$, $\frac{9}{16}=0{,}5625=56{,}25^0/_0$,

$\frac{3}{4}=75^0/_0$, $\frac{9}{25}=36^0/_0$, $\frac{7}{50}=14^0/_0$.

$2\frac{1}{2}=200^0/_0+50^0/_0=250^0/_0$, $7\frac{3}{4}=700^0/_0+75^0/_0=775^0/_0$,

$\frac{2}{3}\approx 67^0/_0$, $\frac{4}{9}=0{,}444\ldots\approx 44^0/_0$.

§ 3. Εβρεςι κάπιυ ποςοςτυ απ' τον αριθμο.

Ι έβρεςι ποςοςτυ κάπιυ αριθμυ ςιμένι, να βρεθι ένα ίτε χάμποςα εκατοςτα τυ ακέρευ κε λίνετε με τον πολαπλαςιαζμο.

1. Δόςανε ςτο φύρνο 560 **χγ** αλέβρι. Πόςο πςομι θα γίνι, αν κατα το πςίςιμο το αλέβρι δίνι περίςεμα $13{,}5^0/_0$;

Λ ί ς ι. Πρότα πρέπι να βρύμε πόςο περίςεμα δίνι το πςίςιμο, διλ. πρέπι να βρεθυν τα 13,5 ίτε τα 0,135 τον 560 **χγ**.

Τα $13{,}5^0/_0$ τον 560 **χγ** αποτελυν $560\cdot 0{,}135=75{,}6$ **χγ**.

Πςομι θα πάρυμε $560+75{,}6=635{,}6$ **χγ**.

2. Να βρεθυν 1) τα $7^0/_0$ τον 42 ρυβλ.. 2) τα $2{,}2^0/_0$ τον $15\frac{1}{2}$ **χγ**.

Λ ί ς ι.

1) Τα $7^0/_0$ τον 42 ρυβλ. ιςύντε με $42\cdot 0{,}07=2{,}94$ ρ. $=2$ ρ. 94κ.

2) τα $2{,}2\%$ τον $15\frac{1}{2}$ χγ ιςύντε με $15{,}5 \cdot 0{,}022 = 0{,}341$ χγ.

3. Να βρεθυν: 1) Τα $\frac{3}{4}\%$ τυ $15\frac{1}{2}$, 2) τα $4\frac{2}{5}\%$ τυ $3\frac{2}{11}$.

1) Τα $\frac{3}{4}\%$ τυ $15\frac{1}{2}$ ιςύντε $15\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{400} = \frac{31 \cdot 3}{2 \cdot 400} = \frac{93}{800} = 0{,}11625$·

ίτε τα $\frac{3}{4}\%$ τυ $15\frac{1}{2}$ ιςύντε $0{,}75$ τυ $15{,}5 = 15{,}5 \cdot 0{,}0075 = 0{,}11625$.

2) $4\frac{2}{5}\%$ τυ $3\frac{2}{11}$ ιςύντε με $3\frac{2}{11} \cdot \frac{22}{500} = \frac{35 \cdot 22}{11 \cdot 500} = \frac{7 \cdot 2}{100} = \frac{14}{100} =$
$= 0{,}14$.

Το πρόβλιμα τις έβρεςις τον ποςοςτον κάπιυ αριθμυ μπορύμε να το γράπςυμε κε με γράματα:

$$a = K \cdot \frac{p}{100}, \text{ ίτε } a = \frac{K \cdot p}{100}.$$

Εδο το a ίνε το ζιτόμενο μέρος τυ ακέρευ, το K ο ακέρεος, το p ο αριθμος τον ποςοςτον.

§ 4. Εβρεςι τυ αριθμυ απο το μέρος-τυ, πυ παραςτένετε με ποςοςτα.

1. Ενας αγοραςτις παράνκιλε ςε κοπερατίβα παλτο κε πλίροςε καπάρο 40% τις αχςίας τυ παλτυ. Τυ δόςανε απόδιχςι πος πλίροςε 50 ρόβλ. Πόςο αχςίζι το παλτο;

Λ ί ς ι. Ι πρότι δόςι αποτελόςε $40\% = 0{,}40$ όλις τις αχςίας κε ιςοδιναμόςε με 50 ρόβλ· Πρέπι να βρύμε τον αριθμο, τυ οπίυ ίνε γνοςτο κάπιο μέρος: $0{,}40x = 50$ ρόβλια,

$x = \frac{50}{0{,}4} = 125$ ρόβ., όπυ το x ίνε ο άγνοςτος αριθμος.

Για να βρύμε τον αριθμο, τυ οπίυ ίνε γνοςτο κάπιο μέρος, πυ παραςτένετε με ποςοςτα, ίνε το ίδιο ςαν να βρύμε τον αριθμο απο το μέρος-τυ κε λίνετε με τι διέρεςι.

Τι λίςι μπορύμε να τιν γράπςυμε με γράματα: $K = a : \frac{p}{100}$ ίτε $K = \frac{a \cdot 100}{p}$.

Εδο το K ίνε ο ακέρεος, το a ίνε το δομένο μέρος τυ ακέρευ, το p τα ποςοςτα.

2. Να βρεθι ο αριθμος, αν ίνε γνοςτο, πος 1) τα 53% τυ αριθμυ ιςύντε με 26,5 χγ, 2) τα 107% τυ αριθμυ ιςύντε με 321 ρόβλ.

Λ ί ς ι.

1) $0{,}53x = 26{,}5$ χγ $\quad x = \frac{26{,}5}{0{,}53} = \frac{2650}{53} = 50$ χγ'

2) $1{,}07x = 321$ ρόβλ., $x = \frac{321}{1{,}07} = 300$ ρόβλ.

Οταν πρόκιτε να βρύμε τον αριθμο απο τα μέρι-τυ, πυ έχυν δοθι ςε ποςοςτα, έχυμε να κάνυμε με τρία βαςικα προβλίματα:

I. Ινε γνοςτο το μέρος τυ αριθμυ ςε ποςοςτα (όπος ςτο προιγύμενο πρόβλιμα).

II. Ινε γνοςτος ο αριθμος (κε ι παράςταςί-τυ με ποςοςτα), πυ θα βρεθι, αν ςτο ζιτύμενο αριθμο θα προςτεθι οριζμένο ποςοςτό-τυ.

III. Ινε γνοςτος ο αριθμος (κε ι παράςταςί-τυ με ποςοςτα), πυ θα βρεθι, αν απ' τον ζιτύμενο αριθμο αφερέςυμε οριζμένο ποςοςτό-τυ.

Ας φέρυμε παραδίγματα:

1) Ι κοπερατίβα πέρνι δάνιο για να χτίςι ςπίτι. Ι τράπεζα τις έδοςε δάνιο 30% τις αχςίας τυ μελύμενυ ςπιτιυ, πυ αποτελύνε 150 000 ρόβλ. Να βρεθι ι αχςία τυ ςπιτιυ, πυ θα φτιαςτι.

Εδο τα 30% τυ αριθμυ (μέρος τυ ζιτύμενυ αριθμυ) αποτελυν 150 000 ρόβλια.

Λ ί ς ι. Να βρεθι ο αριθμος απο το γνοςτό-τυ μέρος $30\% = 0{,}30$, $\quad 0{,}3x = 150\,000$ ρόβλ.

Ο ζιτύμενος αριθμος

$$x = 150\,000 : 0{,}3 = 500\,000 \text{ ρόβλ.}$$

2) Ενα μαγαζι, αγοράζοντας χυβάδες απο το αρτέλι τεχνιτον, πλέροςε απο 2 ρ. 40 κ. για κάθε χυβα, με έκπτοςι 20%. Πόςο αχςίζι ο ένας χυβας χορις έκπτοςι;

Λ ί ς ι. Ιςτερα απο τιν έκπτοςι τον 20% για κάθε χυβα πλίροςαν μονάχα $100 - 20 = 80\%$ τις αρχικις αχςίας-τυ. Οςτε τα 2 ρ. 40 κ. αποτελυν τα 80% τις αχςίας: $80\% = 0{,}80$, $0{,}8x = 2{,}4$ ρόβλ.

Βρίςκυμε τον αριθμο:

$$x = 2{,}4 : 0{,}8 = \frac{24}{8} = 3 \text{ ρόβλ. (ι αχςία τυ χυβα).}$$

3) Ενας χρεόςτις πέραςε τιν προθεζμία τις πλιρομις κε έπρεπε να πλιρόςι πρόςτιμο $12^0/_0$ τυ αρχικυ ποςυ, πυ χρεοςτύςε. Το όλο πλίροςε 56 ρύβλ. Πόςο ίταν το αρχικο ποςο;

Λ ί ς ι. Ι πλιρομι μαζι με το πρόςτιμο αποτέλεςε $100+12=$ $=112^0/_0$ τυ αρχικυ ποςυ. Οςτε τα 56 ρύβλ. ίνε τα $112^0/_0$ ίτε 1,12 τυ ζιτύμενυ αριθμυ: $1{,}12x=56$·

$$x=56:1{,}12=\frac{56\cdot100}{112}=50 \text{ ρύβλ.}$$

§ 5. Ο λόγος δίο αριθμον, πυ παραςτένετε με ποςοςτα.

1. Στιν τάκςι ίνε 32 μαθιτες· 2 μαθιτες δεν ίρθαν ςτο μάθιμα. Πόςα ποςοςτα αποτελυν ι διο αφτι μαθιτες; πόςα ποςοςτα αποτελυν εκίνι πυ ίρθαν;

1) Πόςα ποςοςτα αποτελυν ι μαθιτες, πυ δεν ίρθαν ςτιν τάκςι;

Λ ί ς ι. Πρότα πρέπι να μάθυμε, πιο μέρος τυ 32 αποτελι το 2. Ο λόγος τυ αριθμυ 2 προς το 32 βρίςκετε με διèρεςι: $\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$· Επιτα πρέπι το αποτέλεζμα να το παραςτίςυμε με δεκαδικο κλάζμα κε με ποςοςτα:

$$\frac{1}{16}=0{,}0625=6{,}25^0/_0.$$

2) Πόςα ποςοςτα όλον τον μαθιτον αποτελυν ι 30 μαθιτες, πυ ίρθαν ςτο μάθιμα;

Ο λόγος τυ 30 προς τον 32 ιςύτε $\frac{30}{32}=\frac{15}{16}$· Παραςτένοντας το λόγο αφτο με δεκαδικο κλάζμα κε με ποςοςτα έχυμε:

$$\frac{15}{16}=0{,}9375=93{,}75^0/_0.$$

Δ ο κ ι μ ι. $6{,}25^0/_0+93{,}75^0/_0=100^0/_0$.

2. Τα κοπάδια τον γαλατοφόρον ζόον ςτα κολχόζια κε ςοβχόζια κατα τι δέφτερι εκςαμινία τυ 1931 αφκςίθικαν απο 400 000, ός 1 800 000 κεφάλια.

1) Πόςα ποςοςτα αποτελύςε το κοπάδι ςτιν αρχι τις εκςαμινίας, ςχετικα με το τέλος τυ χρόνυ;

Λ ί ς ι. Ος μονάδα, ίτε $100^0/_0$, πρέπι να παραδεχτύμε τα 1 800 000 ζόα, ςχετικα με τα οπία ο αριθμος 400 000 αποτελι:

$$\frac{400\,000}{1\,800\,000}=\frac{2}{9}\text{ μέρι}\cdot\frac{2}{9}\approx0{,}222=22{,}2^0/_0.$$

2) Πόςα ποςοςτα αποτελι ο αριθμος τον ζόον ςτο τέλος τυ 1931, ςχετικα με τον αριθμο ςτιν αρχι τις εκςαμινίας.

Λ ί ς ι. Ος μονάδα, ίτε $100^0/_0$, πρέπι να παραδεχτύμε τα 400 000 ζόα, ςχετικα με τα οπία ο αριθμος τον ζόον, πυ αφκςίθικαν, αποτελι:

$$\frac{1\,800\,000}{400\,000}=\frac{9}{2}=4{,}5=450^0/_0.$$

3) Κατα πόςα ποςοςτα αφκςίθικαν τα ζόα ςτι δέφτερι εκςαμινία τυ 1931;

Λ ί ς ι. $450^0/_0-100^0/_0=350^0/_0$.

Οταν θέλυμε να βρύμε το λόγο τον αριθμον ςε ποςοςτα, πρέπι να βρύμε τον πολαπλάςιο λόγο-τυς κε να παραςτίςυμε τιν απάντιςι με ποςοςτα.

Σ ι μ ι ό ς ι ς. 1. Κατα τιν έβρεςι τυ λόγυ τον αριθμον, διερέτι πέρνυν εκίνο τον αριθμο, τον οπίο παραδèχοντε για $100^0/_0$.

2. Κατα τιν έβρεςι τυ λόγυ ςε ποςοςτα το εκςαγόμενο το ςτρονκιλέβυν.

3. Πόςα ποςοςτα αποτελυν 1) το 111,8 τυ 1720, 2) το 10 ός προς το 3, 3) το 0,079 τυ 1;

Λ ί ς ι. 1) $\frac{111{,}8}{1720}=0{,}065=6{,}5^0/_0$,

2) $\frac{10}{3}=3{,}333\ldots\approx333^0/_0$,

3) $\frac{0{,}079}{1}=7{,}9^0/_0$.

Τι λίςι μπορύμε να τιν γράπςυμε κε με γράματα: $p=\frac{a}{K}\cdot100$, όπυ το K ìνε ο αριθμος, πυ πàρθικε για $100^0/_0$, ςχετικα με τον οπίο πρέπι να παραςτίςυμε με ποςοςτα (p) το δομένο αριθμο a.

Σ ι μ ί ο ς ι. Το κλάζμα $\frac{a}{K}$ δίχνι τον πολαπλάςιο λόγο τον αριθμον, κε με τον πολαπλαςιαζμο επι 100 παραςτένετε με ποςοςτα.

§ 6. Προβλίματα για χριματικυς λογαριαζμυς.

Στα προβλίματα για χριματικυς λογαριαζμυς σιναντύντε 4 αριθμι: 1) το αρχικο ποσο, 2) ο αριθμος τον ποσοστον, 3) ο χρόνος, 4) το κέρδος ίτε ι ζιμία σε οριζμένο χρονικο διάστιμα. Κάποτε στα προβλίματα στι θέσι τυ αριθμυ, πυ παραστένι το κέρδος ίτε τι ζιμία, σιναντάτε αριθμος, πυ δίχνι, σε τί μετατρέπυμε το αρχικο ποσο μαζι με το επιπρόσθετο κέρδος, ίτε εκίνο το ποσο, πυ μένι μετα τιν αφέρεσι τις ζιμίας.

Τα τρία απο τα παραπάνο ποσα μας δίνοντε στο πρόβλιμα· πρέπι να βρεθι το τέταρτο ποσο. Ετσι μπορυν να ιπάρχυν 4 κιριότερα προβλίματα στυς χριματικυς λογαρίαζμυς με τόκο.

I. α) Πόσο έσοδο δίνι κεφάλεο 50 ρ. κατατεθιμένο στο κρατικο ταμιεφτίριο για 9 μίνες προς $8^0/_0$ το χρόνο;

Λ ί σ ι. Το ετίσιο έσοδο αποτελι τα $8^0/_0$ τον 50 ρυβλίον διλ. $50 \cdot 0{,}08 = 4$ ρύβλ. (Τόρα το ταμιεφτίριο πλιρόνι $3^0/_0$)

Το έσοδο στα $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ τυ χρόνυ αποτελι $4 \times \frac{3}{4} = 3$ ρύβλ.

β) Πόσο θα αφκσιθι ι κατάθεσι τον 50 ρυβλ. στο ταμιεφτίριο προς $8^0/_0$ το χρόνο, αφυ περάσυν 9 μίνες;

Λ ί σ ι. Παραπάνο λογαριάσαμε κε ίβραμε πος το έσοδο σε 9 μίνες αποτελι 3 ρύβλια· τότε ο καταθέτις θα πάρι $50 + 3 = 53$ ρύβλ.

Στα προβλίματα α, κε β, πυ εκσετάσαμε, έχυν δοθι τα ποσα: 1) το αρχικο ποσο, 2) ο αριθμος τον ποσοστον 3) ο χρόνος. Ζιτύνταν να βρεθι: 4) το κέρδος (στο πρόβλιμα α) κε το αρχικο ποσο μαζι με το επιπρόσθετο κέρδος (στο πρόβλιμα β).

II. Ιστερα απο πόσο χρόνο 1350 ρύβλ. προς $8^0/_0$ το χρόνο θα δόσυν: α) έσοδο 477 ρύβλ., β) θα γίνυν 1827 ρύβλ.;

Λ ί σ ι. α) Το ετίσιο έσοδο τον 1350 ρύβ. προς $8^0/_0$ αποτελι $(1350 \cdot 0{,}08)$ ρύβλ. $= 108$ ρύβλ.

Εσοδο 477 ρυβλίον θα παρθι σε $477 : 108 = 4\frac{45}{108} = 4\frac{5}{12}$ τυ χρόνυ, διλ. σε 4 χρόνια κε 5 μίνες.

β) Πρότα πρέπι να βρύμε το κέρδος: $1827 - 1350 = 477$ ρύβλ. Επιτα το πρόβλιμα λίνετε όπος κε στιν παρ. α).

Στα προβλίματα, πυ εκσετάσαμε, έχυν δοθι: 1) το αρχικο ποσο, 2) ο αριθμος τον ποσοστον, 3) το κέρδος ίτε το αρχικο ποσο με το επιπρόσθετο.

Ζιτύνταν ο χρόνος.

III. Πόσα ποσοστα το χρόνο πλιρόνι το κρατικο ταμιεφτίριο, αν για 150 ρυβλιον κατάθεσι μετα 9 μίνες α) έδοσαν 9 ρύβλ., β) πλιρόθικαν στον καταθέτι 159 ρύβλ.;

Λ ί σ ι. Κε στα διο προβλίματα το έσοδο αποτελι 9 ρύβλ. Επομένος, το ετίσιο έσοδο αποτελι:

$$9 : \frac{9}{12} = 12 \text{ ρύβλ.}$$

12 ρύβλ. απ' τιν κατάθεσι τον 150 ρυβλ. αποτελυν $\frac{12}{150} = 0{,}08 = 8^0/_0$.

Στα προβλίματα αφτα έχυν δοθι: 1) το αρχικο ποσο, 2) ο χρόνος, 3) το κέρδος ίτε το επιπρόσθετο ποσο. Ζιτίτε να βρεθι ο αριθμος τον ποσοστον.

IV. α) Πιό ποσο, πυ δίνι το χρόνο $7^0/_0$, σε 3 χρόνια θα δόσι έσοδο 420 ρύβλ.;

Λ ί σ ι. Το ετίσιο έσοδο αποτελι $7^0/_0$ τυ αριθμυ, διλαδι 0,07. Το έσοδο σε 3 χρόνια θα ίνε $0{,}07 \cdot 3 = 0{,}21$ τυ ζιτύμενυ ποσυ.

Αν θα παραστίσυμε το άγνοστο ποσο με το x, τότε $0{,}21x = 420$.

$$x = \frac{420}{0{,}21} = \frac{420 \cdot 100}{21} = 2000 \text{ ρύβλια.}$$

β) Πιό ποσο, πυ δίνι $10^0/_0$ το χρόνο, μετα 3 χρόνια θα μετατραπι σε 520 ρύβλ;

Λ ί σ ι. Το ετίσιο κέρδος αποτελι $10^0/_0 = 0{,}1$ τυ άγνοστυ ποσυ. Το κέρδος σε 3 χρόνια θα αποτελι τα 0,3 τυ άγνοστυ ποσυ διλ. $1{,}3x = 520$ ρύβλ., όπυ το x ίνε το άγνοστο ποσο.

$$x = \frac{520}{1{,}3} = \frac{5200}{13} = 400 \text{ ρύβλ.}$$

Στα προιγύμενα προβλίμα —α) κε β)— έχυν δοθι: 1) ο χρόνος, 2) ο αριθμος τον ποσοστον, 3) το έσοδο ίτε το αρχικο ποσο με το επιπρόσθετο ποσο. Ζιτίτε το αρχικο ποσο.

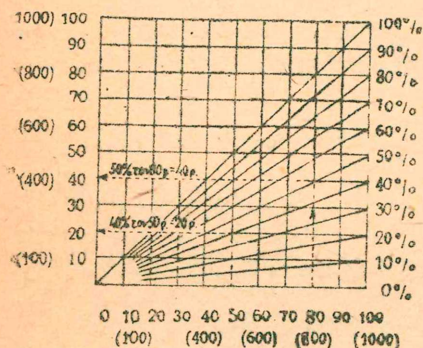
Σ ι μ ί ο σ ι. Αν κατα τι λίσι τον προβλιμάτον παρυσιάζετε ο χρόνος σε μίνες κε ιμέρες, τότε πρέπι το χρόνο να τον λογαριάζυμε 360 μέρες, κε το μίνα 30 μέρες.

§ 7. Γραφικο διάγραμα για τιν έβρεσι τον ποσοστον.

Τα προβλίματα τον ποσοστον μπορύμε να τα λίςυμε με τι βοίθια τον γραφικον διαγραμάτον.

Στο ςχίμα 6 έχυμε γραφικο διάγραμα ςε γραμες, πυ κσεκινυν απο τιν εφθία προς το ςιμίο, πυ βρίςκετε ςτιν άκρι τις δεκςιας κάθετις γραμις. Πρέπι να βρεθι πάνο ςτο διάγραμα αφτο, με τί ιςύντε τα 40% τον 50 ρυβλ. Απάντιςι: 20 ρύβλ. Ι λίςι δίχνετε με βέλος. Ακριβος έτςι κε τα 50% τον 80 ρυβλ. αποτελυν 40 ρύβλ.

Με τον ίδιο τρόπο ςχιματίζυν εφθίες για να βρύνε 10%, 20% κ.τ.λ. ός τα 100%



Σχ. 6.

Σχ. 7.

Για να μας επιτρέπι το γραφικό-μας διάγραμα να κάνυμε παρόμιυς λογαριαζμυς με αριθμυς παραπάνο απο τα 100, μπορύμε να δόςυμε διάφορες τιμες ςτι μονάδα τις κλίμακας.

Στο ςχ. 7 φένετε πος μπορύμε χορις να τραβίκςυμε γραμες, πάνο ςτο γραφικο διάγραμα, με τι βοίθια τυ χάρακα να βρύμε τα 80% τυ 50.

XVII. ΤΙΠΙ ΚΕ ΠΡΑΚΣΙΣ ΜΕ ΤΥΣ ΤΙΠΥΣ.

§ 1. Τίπι.

Ος τόρα εμις χρισιμοπιύςαμε παραςτάςις με γράματα. Ας δίκςυμε, πός χρισιμοπιυν ςτα μαθιματικα τις παραςτάςις με γράματα κατα τι λίςι τον προβλιμάτον.

1. Να λιθυν τα προβλίματα:

1) 1 μ ίφαζμα ακςίζι 10 ρύβλ. Πόςο ακςίζυν τα 7 μ.
2) 1 „ „ „ 5 „ „ „ „ 7 „
3) 1 „ „ „ 10 „ „ „ „ 8 „
4) 1 „ „ „ 6 „ „ „ „ 12 „

5) 1 χγ ζάχαρι ακςίζι 2 ρύβλ. Πόςο ακςίζυν τα 4 χγ.
6) 1 μονάδα εμπορέβματος ακςίζι a ρύβλ. „ „ ί b μονάδες.

Λίςι: 1) $10 \cdot 7 = 70$ ρυβλ.
2) $5 \cdot 7 = 35$ „
3) $10 \cdot 8 = 80$ „
4) $6 \cdot 12 = 72$ „
5) $2 \cdot 4 = 8$ „

Τι λίςι τυ 6 προβλίματος τι γράφυμε έτςι:

$$a \cdot b = c.$$

Εδο το a παραςτένι τιν ακςία τις μονάδας τυ μέτρυ οπιυδίποτε εμπορέβματος, το b παραςτένι το ποσο τον μονάδον κε το c τιν όλι ακςία τυ εμπορέβματος. Στι θέςι τυ a μπορύμε να βάλυμε 10, 5, 10, 6, 2· ςτι θέςι τυ b 7, 7, 8, 12, 4 κε τότε το c θα ιςύτε με 70, 35, 80, 72, 8.

Σε κάθε αριθμιτικο πρόβλιμα διακρίνυμε: τυς δομένυς αριθμυς, τυς ζιτύμενυς αριθμυς, τιν εκςάρτιςι αναμετακςί-τυς, πυ καθορίζετε απο τυς όρυς τυ προβλίματος. Τυς ζιτύμενυς αριθμυς τυς βρίςκυμε, όταν δίνυμε απάντιςι ςτιν ερότιςι τυ προβλίματος.

Λίνοντας το πρόβλιμα, βρίςκυμε τιν εκςάρτιςι μετακςι τον μεγεθον, μετακςι τον δομένον κε ζιτύμενον αριθμον κε καθορίζυμε το χαραχτίρα αφτις τις εκςάρτιςις. Κςέροντας πιά εκςάρτιςι ιπάρχι μετακςι τον δομένον κε τον εκςαγομένον, μαθένυμε, πιές πράκςις κε με πιά ςιρα πρέπι να τις κάνυμε.

Ολα τα προβλίματα τυ 1 παραδίγματος λίνοντε με ένα τρόπο, με ένα κανόνα· ς'όλα αφτα τα προβλίματα χρισιμοπιύμε τον πολαπλαςιαζμο κε βρίςκυμε το γινόμενο τυ αριθμυ, πυ δίχνι τιν ακςία τις μονάδας τυ μέτρυ τυ εμπορέβματος πυ πυλίθικε, επι τον αριθμο τον μονάδον. Στο τέλος βρίκαμε ένα γενικο κανόνα για τι λίςι όλον αφτον τον προβλιμάτον, ςιμιόνοντας τυς δομένυς αριθμυς κε τυς ζιτύμενυς με γράματα, αντις τον αριθμιτικον ςιμίον. Κατ' αφτον

τον τρόπο λίςαμε γενικο πρόβλιμα, όπος λένε, ςχιματίςαμε τίπο για τι λίςι όλον αφτον τον προβλιμάτον.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Τίπος ονομάζετε ι παράςταςι, πυ δίχνι, πιές πράκςις κε με πιά ςιρα πρέπι να εχτελεςτυν για να λίςυμε το πρόβλιμα.

2. Γράπςτε τι λίςι με τίπο:

1) Ενα τρένο πίγενε 4 όρες με ταχίτιτα 35 χμ τιν όρα κε 5 όρες με ταχίτιτα 38 χμ τιν όρα. Πόςι ίνε κατα μέςο όρο ι ταχίτιτα τυ τρένυ ς'αφτο το διάςτιμα;

Λ ί ς ι.

$$\text{Μέςι ταχίτιτα} = \frac{35 \cdot 4 + 38 \cdot 5}{4 + 5} = \frac{140 + 190}{9} = 36\frac{2}{3} \text{ χμ.}$$

2) Αν το τρένο 3 όρες πίγενε με ταχίτιτα 30 χμ τιν όρα κε 4 όρες με ταχίτιτα 35 χμ τιν όρα, τότε τι μέςι ταχίτιτα πρέπι να τιν βρύμε με τον τίπο:

$$\text{Μέςι ταχίτιτα} = \frac{30 \cdot 3 + 35 \cdot 4}{3 + 4} \text{ χμ.}$$

3) Τίπος με γράματα για τιν λίςι όλον τον παρόμιον προβλιμάτον:

$$v = \frac{at_1 + bt_2}{t_1 + t_2},$$

όπυ το a ίνε ο αριθμος τον χιλιομέτρον, πυ διατρέχι το τρένο ςε μια όρα ςτο διάςτιμα τον πρότον t_1 ορον· b ίνε ο αριθμος τον χιλιομέτρον, πυ διατρέχι το τρένο ςτιν όρα ςτο διάςτιμα τον τελεφτέον t_2 ορον, κε v ίνε ι μέςι ταχίτιτα.

§ 2. Παράςταςι με γράματα. Ι ςιρα τον πράκςεον. Παρενθέςις.

1. Για να ιςάγυν ομιομορφία ςτυς τρόπυς τυ ςχιματιςμυ κε τις γραφις τον τίπον, ςιμφόνιςαν να παραςτίςυνε τυς αριθμυς με γράματα τυ λατινικυ (ίτε τυ γαλικυ) αλφάβιτυ. Τα γράματα αφτα παραςτένυν οποιοδίποτε αριθμο, πυ να ικανοπιι τυς όρυς τυ προβλίματος.

Εχτος απο τα γράματα, για τι γραφι τον όρον τυ προβλίματος κε για τι λίςι-τυ, χριςιμοπιύνε τα ςιμία τον πράκςεον τις αριθμιτικις: τιν πρόςθεςι τον αριθμον τιν ςιμιόνυν με το ςιμίο (+)· τιν αφέρεςι με το ςιμίο (—)· τον πολαπλαςιαςμο με το ςιμίο (×) ίτε (·)· τι διέρεςι με το ςιμίο (:) ίτε με τι γραμι τυ κλάζματος. Το ςιμίο τυ πολαπλαςιαςμυ μπορι κε να παραλιφθι (βλέπε κεφ. IV, § 1).

2. Ι όρι ςτι ςιρα τον πράκςεον μένυν ι ίδιι κε για τις παραςτάςις με γράματα. Αν ο τίπος παρυςιάζι πράκςις μονάχα μιας βαθμίδας, τότε τις κάνυν με τι ςιρα όπος ίνε γραμένες· αν ο τίπος παρυςιάζι πράκςις διαφόρον βαθμίδον, τότε ςε πρότι ςιρα εχτελυν τις πράκςις τον ανότερον βαθμίδον.

Ολες τις παραβάςις τον κανόνον αφτον τις ςιμιόνυν με παρενθέςις. Αν ο τίπος παρυςιάζι παρενθέςις, τότε πρότα κάνυν τις πράκςις, πυ βρίςκοντε ςτις παρενθέςις.

Ο τίπος $(a+b)\cdot m$ δίχνι, πός πρέπι πρότα να βρεθι το άθριζμα a κε b κε έπιτα να πολαπλαςιαςθι αφτο επι τον αριθμο m.

Αν ιπάρχυν διαφόρον ίδον παρενθέςις ( ) { } [ ], τότε όπος κε πάντα, πρότα κάνυν εκίνες τις πράκςις, ι οπίες βρίςκοντε ςτις εςοτερικες παρενθέςις. Αντι τον παρενθέςεον εποφελύντε επίςις κε τι γραμι τυ κλάζματος. Ι τίπι:

$$n = [(a + b) : m] \cdot c, \qquad n = \frac{a + b}{m} \cdot c$$

έχυν τιν ίδια τιμι: αφτι δίχνυν, πος το άθριζμα τον αριθμον a κε b πρέπι να το διερέςυμε δια τυ m κε το εκςαγόμενο να το πολαπλαςιάςυμε επι το c.

Σ ι μ ί ο ς ι. Πρέπι να θιμιθύμε, πος τον πολαπλαςιαςμο αθρίςματος κε διαφορας πάντα τον ςιμιόνυν με τις παρενθέςις.

Ι παραςτάςις: $(a+b)\cdot m$ κε $(a-b)\cdot m$ διαβάζοντε έτςι: το άθριζμα ίτε τι διαφορα δίο αριθμον πρέπι να το πολαπλαςιάςυμε επι τον αριθμο m.

Αν γράφαμε χορις παρενθέςις: $a + bm$ κε $a - bm$, αφτο θα ςίμενε, πος ςτον αριθμο a πρέπι να προςθέςυμε ίτε απο αφτον να αφερέςυμε το γινόμενο τον αριθμον b κε m.

§ 3. Σιντελεςτις. Δίναμι.

1. Ο ρ ι ζ μ ο ς. Ο αριθμιτικος παράγοντας ςτιν παράςταςι με γράματα ονομάζετε ςιντελεςτις.

Ο ςιντελεςτις γράφετε μπροςτα απο τυς άλυς παράγοντες.

Παράδιγμα. 1) $3a^2b$, 2) $\frac{4}{7}mn$, 3) $0{,}9ab$.

Ο ςιντελεςτις μπορι να ίνε ακέρεος κε κλαζματικος.

Ο ςιντελεςτις δίχνι, πος μπορύμε να αντικαταςτίςυμε τιν πρόςθεςι με τον πολαπλαςιαζμο.

Παράδιγμα. $a + a + a = 3a$.

Ετςι ο ςιντελεςτις ςιντομέβι τι γραφι τον πράκςεον.

1. $a + a + a + a = 4a$.
2. $b + b - c - c - c = b + b - (c + e + c) = 2b - 3c$.
3. $\frac{1}{4}m + \frac{1}{4}m + \frac{1}{4}m = \frac{m}{4} + \frac{m}{4} + \frac{m}{4} = \frac{3m}{4} = \frac{3}{4}m$.
4. $5a^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$.
5. $\frac{4}{5}ab = \frac{1}{5}ab + \frac{1}{5}ab + \frac{1}{5}ab + \frac{1}{5}ab$.
6. $0{,}3m - 0{,}2n = 0{,}1m + 0{,}1m + 0{,}1m - 0{,}1n - 0{,}1n$.

II. Κατα τον πολαπλαςιαζμο όμιον παραγόντον, όπος κςέρυμε, ίνε δινατι κάπια απλοπίςι (βλέπε § 10, κεφ. IV)

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, 2) $10 \cdot 10 \cdot 10$.

Για τέτια γινόμενα ιπάρχι ο ακόλυθος τρόπος τις γραφις:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$, 2) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$.

Τον πολαπλαςιαζμο όμιον παραγόντον τον χορίζυν ςε ιδιέτερι πράκςι, τιν οπία ονομάζυν ίπςοςι ςτι δίναμι.

Κατα τιν γραφι με γράματα έχυμε τον τίπο:

$$a^n = N.$$

Στον τίπο αφτο, a ίνε ι βάςι, n ίνε ο εκθέτις, τις δίναμις τυ αριθμυ a.

1) $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, 2) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$,
3) $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$.

Σ ι μ ί ο ς ι. Το ςιμίο τυ πολαπλαςιαζμυ μπορι να παραλιφθι μπροςτα απο τις παρενθέςις, ίτε μπροςτα απο το ςιμίο, πυ αντικαταςτένι τις παρενθέςις.

§ 4. Ι κιριότερι τίπι.

Σιχνα ςιναντάμε τέτιες παραςτάςις με γράματα ίτε τίπυς:

1. Ο τίπος τυ αθρίζματος: $m = a + b$.
2. Ο τίπος τις διαφορας: $n = a - b$.
3. Ο τίπος τυ γινομένυ: $p = a \cdot b$, ίτε $p = ab$.
4. Ο τίπος τυ πιλίκυ ίνε: $q = a : b = \frac{a}{b}$.
5. „ „ τις ιςότιτας ίνε: $a = b$.
6. „ „ τις ανιςότιτας ίνε: $a > b$, $b < a$.

Ι διάφορι ςινδιαζμι γραμάτον κε ςιμίον ςχιματίζυν άλυς πιο ςίνθετυς τίπυς.

7. Ο τίπος τυ άρτιυ αριθμυ ίνε: $k = 2n$.

Στι θέςι τυ n μπορύμε να γράπςυμε οπιοδίποτε ακέρεο αριθμο, αρχίζοντας απο το μιδενικο. Θα ςχιματιςθι μια ςιρα άρτιον αριθμον: 0, 2, 4, 6,...

8. Ο τίπος τυ περιτυ αριθμυ ίνε: $l = 2n + 1$ ίτε $l = 2n - 1$.
9. „ „ τυ αριθμυ, πυ διερίτε δια τυ n ίνε: $x = n \cdot a$.
10. „ „ τις διέρεςις με κατάλιπο ίνε: $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.
11. „ „ τυ διπςίφιυ αριθμυ ίνε: $m = 10a + b$, εδο το a ίνε αριθμος τον δεκάδον, το b ίνε αριθμος τον μονάδον.

§ 5. Ι αριθμιτικες τιμες τον τίπον.

Ο ρ ι ζ μ ο ς. Αριθμιτικι τιμι τυ τίπυ ονομάζετε εκίνος ο αριθμος, πυ βρίςκετε όταν αντικαταςτένυμε τα γράματα τυ τίπυ με τυς αντίςτιχυς αριθμυς κε κάνυμε τις πράκςις, πυ ιποδίχνοντε ςτον τίπο με οριςμένι ςιρα.

1. Ας πάρυμε τον τίπο τυ εμβαδυ τυ ορθογόνιυ $s = ah$. Στον τίπο αφτο το s παραςτένι τον αριθμο τον τετραγονικον μονάδον τυ εμβαδυ, το a παραςτένι τον αριθμο τον μονάδον τυ μίκυς τις βάςις, το h παραςτένι τον αριθμο τον μονάδον τυ μάκρυς τυ ίπςυς.

Ας βρύμε τι ςιμαςία τυ εμβαδυ αν το $a = 5$ **ςμ** κε $h = 8$ **ςμ**.
Θα έχυμε:

$s = 5 \cdot 8 = 40$ **τετρ. ςμ.**

Αν το $a = 2{,}4$ **μ** κε το $h = 0{,}8$ **μ** θα έχυμε:

$s = 2{,}4 \cdot 0{,}8 = 1{,}92$ **τετρ. μ.**

2. Να βρεθι $a^2 + b^2 =$ αν $a = 3$, $b = 5$.

Λίςι. $a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

§ 6. Πός καθορίζετε με τίπο οπιοδίποτε μέγεθος ςχετικα με άλα μεγέθι.

Ο τίπος τυ εμβαδυ τυ ορθογονίυ ίνε:

$$s = ah.$$

Σίμφονα με τον τίπο αφτο μπορύμε να λίςυμε τέτια προβλίματα:

I. Να βρεθι το εμβαδο, όταν μας ίνε γνοςτι ι βάςι κε το ίπςος.

II. Να βρεθι το ίπςος, όταν ίνε γνοςτι ι βάςι κε το εμβαδο.

III. Να βρεθι ι βάςι όταν μας ίνε γνοςτο το ίπςος κε το εμβαδο.

Λίςι I: $s = ah$. Λίςι II: $h = \frac{s}{a}$. Λίςι III: $a = \frac{s}{h}$.

Ι δέφτερι κε ι τρίτι λίςι ίνε ίδιες με κίνες, όταν θέλυμε να βρύμε με τι διέρεςι έναν απο τυς παράγοντες, κςέροντας το γινόμενο κε τον άλο παράγοντα.

Ας κάνυμε τι δοκιμι τις λίςις αφτις με αριθμυς. Ας ιποθέςυμε, ότι $a = 5$, $h = 8$ κε $s = 40$.

$$\text{I. } 40 = 5 \cdot 8, \quad \text{II. } 8 = \frac{40}{5}, \quad \text{III. } 5 = \frac{40}{8}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, ςτιριζόμενι ςτυς νόμυς τον πράκςεον κε ςτιν εκςάρτιςι, πυ ιπάρχι ανάμεςα ςτα δομένα κε ςτα εκςαγόμενα τον πράκςεον, μπορύμε να βρύμε το μέγεθος κε με πιο ςίνθετυς τίπυς.

§ 7. Σχιματιζμος τίπον ςίμφονα με τυς όρυς τον προβλιμάτον.

Οταν θέλυμε να ςχιματίςυμε τίπυς για τι λίςι προβλιμάτον, ίνε καλο να ακολυθίςυμε τιν εκςις ςιρα:

I. Να διαβάςυμε τυς όρυς τυ προβλίματος.

II. Να ςιμιόςυμε με γράματα τα δομένα κε τα εκςαγόμενα τις λίςις τυ προβλίματος.

III. Να χορίςυμε το ςίνθετο πρόβλιμα ςε απλα προβλίματα.

IV. Να οριςθι, με πιά πράκςι λίνετε κάθε απλο πρόβλιμα.

V. Να γραφυν ι όρι με τα γράματα, πυ ορίςαμε.

VI. Να οριςτι ςίμφονα με τον τίπο το ζιτύμενο μέγεθος.

Σιμίοςι. Τα δομένα μεγέθι ςινιθίζυν να τα παραςτένυν με τα πρότα γράματα τυ λατινικυ αλφαβίτυ: a, b, c, d,..., κε τα ζιτύμενα με τα τελεφτέα γράματα: x, y, z, t,...

Ας λίςυμε ένα παράδιγμα για το ςχιματιζμο τίπυ απ' τον όρο τυ προβλίματος.

I. Ενα αφτοκίνιτο διατρέχι το μερόνιχτο κάμποςο δρόμο· άλο αφτοκίνιτο διατρέχι το μερόνιχτο λιγότερο δρόμο κατα κάμποςα χιλιόμετρα. Να βρεθι ο δρόμος, πυ έχι διατρέκςι το δέφτερο αφτοκίνιτο το μερόνιχτο.

Λίςι.

II. Παραςτένυμε το δρόμο τυ πρότυ αφτοκίνιτυ με το γράμα a (δομένο).

Παραςτένυμε το δρόμο τυ δέφτερυ αφτοκίνιτυ με το γράμα x (ζιτύμενο).

Το πρότο αφτοκίνιτο διατρέχι κατα b χιλιόμετρα περιςότερο παρα το δέφτερο (το b ίνε δομένο).

III. Το πρόβλιμα ίνε απλο κε λίνετε με μια πράκςι.

IV. Το πρόβλιμα λίνετε με τιν πρόςθεςι.

V. Γράφυμε τυς όρυς τυ προβλίματος: $a = b + x$.

VI. Βρίςκυμε με τον τίπο το x. Το x βρίςκετε ος άγνοςτος προςθετέος, όταν ίνε γνοςτο το άθριςμα κε ο άλος προςθετέος b:

$$x = a - b.$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.

Главный редактор Х. КАЧАЛОВ.

Редактор Ф. ГРИГОРИАДИ.

Ответ. по корректуре С. АСАНОВ Техред. Ю. ТОПАЛИДИ

Сдано в набор 25/VI-1937 г.
Издание № 276
Формат бумаги 62×94$^{1}/_{16}$
Тираж 2000
Цена книги 85 к., переплет 30 к.

Подпис. в печ. 4/VII-1937 г.
Уполкрайлит Г.—21
Об'ем 11$^{1}/_{2}$ печ. л.
Заказ № 1140

Типография „Коммунистис“ ст. Крымская 1937 г.

Τιμι 1 р. 15 к.
Цена 1 р. 15 к.

На греческом языке

И. ПОПОВ

АРИФМЕТИКА

Учебник для неполной средней и средней школы

5-го и 6-го классов

СКЛАД ИЗДАНИЯ
Ростов на Дону,
ул. Московская, 53
— КОГИЗ —

Ι. ΠΟΠΟΦ

ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΙ

ΔΙΔΑΧΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΥ ΜΙ ΠΛΕΡΙΥ ΜΕΣΕΥ ΚΕ ΜΕΣΕΥ ΣΧΟΛΙΥ

ΕΚΔΟΤΙΚΟ • «ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ» • ΚΡΙΜΣΚΑΓΙΑ • 1937